Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik

Grundkurs

Hinweise

Die Prüflinge erhalten zu Beginn alle Aufgabenstellungen.

Die Abiturprüfung beginnt für alle Prüflinge mit der Bearbeitung der Aufgabe 1 zum hilfsmittelfreien Teil in einem Umfang von 60 Minuten.

Hinweise zum hilfsmittelfreien Teil (Aufgabenstellung 1)

Die Lösungen der Aufgaben aus diesem Teil der Prüfung werden nach **60** Minuten eingesammelt. Prüflinge, die für die Aufgabe 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit der Bearbeitung der weiteren Wahlaufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln. Nach der vollständigen Abgabe der Lösungen der Aufgabe 1 durch alle Prüflinge beginnt die Arbeit an den weiteren Aufgaben unter Verwendung von Formelsammlung und Rechner bzw. CAS-Rechengerät.

Hinweise zu den Erwartungshorizonten

Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungswege, sondern teilweise nur kurze Angaben.

Für jede Teilaufgabe ist die Gesamtanzahl der für diese Aufgabe zu erreichenden Bewertungseinheiten zu entnehmen. Die Summe der Bewertungseinheiten pro Teilaufgabe ist verbindlich.

Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten entsprechend zu vergeben.

Für richtig vollzogene Teilschritte, die auf falschen Zwischenergebnissen basieren, ist im Allgemeinen die vorgesehene Anzahl von Bewertungseinheiten zu erteilen. Werden dadurch jedoch die Teilschritte vereinfacht oder kommentarlos sinnlose Endergebnisse angegeben, ist eine angemessen verminderte Anzahl dieser Bewertungseinheiten zu erteilen.

In der Regel sind die Bewertungseinheiten nicht einzelnen Teilleistungen kleinschrittig zugeordnet, so dass didaktische Aspekte bei der Bewertung berücksichtigt werden können.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 1 für Prüflinge

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
nicht für Aufgabenstellung 1	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist
	Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	255 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.

Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 60 Minuten abgegeben.

Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.

In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 60 Minuten verwendet werden.

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis 1

Die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = 2x^4 - x + 1$ ist eine Stammfunktion einer Funktion f.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion f.

b) Geben Sie die Gleichung aller Stammfunktionen von f an.
Es gibt zwei Stammfunktionen von f, deren Graphen zu dem Funktionsgraphen der Funktion F einen Abstand von 3 LE in Richtung der y-Achse haben.
Geben Sie zu diesen beiden Stammfunktionen von f je eine Funktionsgleichung an.

1.2 Analysis 2

Der Graph einer quadratischen Funktion f verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Tangente an diesen Graphen im Punkt $(2\,|\,f(2))$ hat die Gleichung $y = 4x - 2$.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von f.

1.3 Geometrie 1

Gegeben sind die drei Punkte $A(3\,|\,4\,|\,-1)$, $B(4\,|\,6\,|\,0)$ und $C(1\,|\,0\,|\,-3)$.

a) Weisen Sie nach, dass die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden g liegen.

b) Geben Sie die Koordinaten eines weiteren Punktes D an, der ebenfalls auf der Geraden g liegt und vom Punkt A den gleichen Abstand hat wie der Punkt B.

1.4 Geometrie 2

Gegeben sind die Punkte $A(7\,|\,-3\,|\,5)$ und $B(4\,|\,1\,|\,5)$.

a) Ermitteln Sie den Abstand der Punkte A und B.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten eines möglichen Punktes C so, dass das Dreieck ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{AB}$ ist, das einen Flächeninhalt von 10 FE hat und senkrecht zur x-y-Ebene steht.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.5 Stochastik

In einem Behälter befinden sich drei blaue und zwei rote Kugeln.

a) Zwei Kugeln werden zufällig nacheinander entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die beiden Kugeln unterschiedliche Farben haben.

b) Die beiden entnommenen Kugeln werden in den Behälter zurückgelegt. Anschließend entnehmen zwei Spielerinnen dem Behälter abwechselnd jeweils eine Kugel zufällig. Die Spielerin, die zuerst eine rote Kugel entnimmt, gewinnt.
Weisen Sie nach, dass diejenige Spielerin, die die erste Kugel entnimmt, einen Vorteil hat.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgaben										
Aufgabe	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2	1.3 Geometrie 1		1.4 Geometrie 2		1.5 Stochastik		
Aufgabenteil	a)	b)		a)	b)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	1	4	5	3	2	1	4	2	3	25

Erwartungshorizont zu den Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE

Aufgabe 1.1 – Analysis 1		
a)	$f(x)=8x^3-1$	1
b)	$F(x)=2x^4-x+1+c;\ c\in \mathbb{R}$ $F_1(x)=2x^4-x+4$ und $F_2(x)=2x^4-x-2$	4
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.2 – Analysis 2		
	$f(x)=ax^2+bx+c$ Es gilt $f(0)=0 \Rightarrow c=0$. $f(2)=4\cdot 2-2=6$ und $f'(2)=4$ liefern das Gleichungssystem: I $4a+2b=6$ II $4a+b=4$ Daraus ergibt sich $b=2$ und $a=\frac{1}{2}$.	5
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.3 – Geometrie 1		
a)	$g_{AB}:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; Punktprobe $\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ ist erfüllt für $r=-2$	3
b)	Für $r=1$ liefert die Geradengleichung $\overrightarrow{OB}$, für $r=-1$ ergibt sich $D(2\mid 2\mid -2)$ mit $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{AD}\right\rvert$	2
	Summe der BE	5

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE

Aufgabe 1.4 – Geometrie 2

a)	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{25} = 5$	1
b)	Wegen $A = \frac{g \cdot h}{2} = 10\,\text{LE}$ ist $h_{\text{Dreieck}} = 4\,\text{LE}$ Weil beide Punkte die gleiche z-Koordinate haben, verläuft die Höhe des Dreiecks senkrecht zur x-y-Ebene. Der gesuchte Punkt liegt z. B. 4 LE senkrecht über dem Mittelpunkt $M(5{,}5\,\vert -1\vert 5)$ der Strecke $\overline{AB}$. Ein möglicher Punkt ist $C(5{,}5\,\vert -1\vert\, 9)$.	4
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.5 – Stochastik

a)	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$	2
b)	Für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Spielerin gewinnt, die die erste Kugel entnimmt, gilt $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} > \frac{1}{2}$.	3
	Summe der BE	5

Aufgabe	**1.1**		**1.2**	**1.3**		**1.4**		**1.5**	
Teilaufgabe	**a**	**b**		**a**	**b**	**a**	**b**	**a**	**b**
BE	1	4	5	3	2	1	4	2	3

Anforderungsbereich										
	I	x			x		x		x	
	II		x	x		x				x
	III			x				x		

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik

Grundkurs

Aufgabenvorschlag Teil 2 für Prüflinge

Hilfsmittel:

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

---

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 2.1: Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=(6x-3)e^{-x}$, $x \in IR$.

a) Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

b) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die 1. Ableitung von f die Gleichung $f'(x)=(-6x+9)e^{-x}$ hat.

Der Graph von f hat einen lokalen Extrempunkt.

Ermitteln Sie die Koordinaten dieses Extrempunktes.

d) In der Skizze in der Anlage ist der Graph von f' skizziert.

Begründen Sie mithilfe dieser Skizze, dass der lokale Extrempunkt von f ein Hochpunkt ist.

e) Skizzieren Sie den Graphen von f für $x \geq 0$ in dem Koordinatensystem in der Anlage.

f) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P\left(1 \middle| f(1)\right)$.

Berechnen Sie den Winkel, unter dem diese Tangente die x-Achse schneidet.

g) Im Bereich $x \geq 1$ gibt es eine Stelle x_M, an der der senkrechte Abstand der Graphen von f und f' maximal ist.

Berechnen Sie den Wert von x_M und den Abstand der beiden Graphen an dieser Stelle.

Hinweis: Auf den Nachweis, dass es sich um ein Maximum handelt, kann verzichtet werden.

h) Beschreiben Sie, wie nachgewiesen werden kann, dass die Funktion F mit $F(x)=(-6x-3)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Stammfunktion H von f mit der Eigenschaft $H(0)=17$ an.

i) Der Graph von f, die x-Achse und die Geraden $x=1$ und $x=5$ schließen eine Fläche ein.

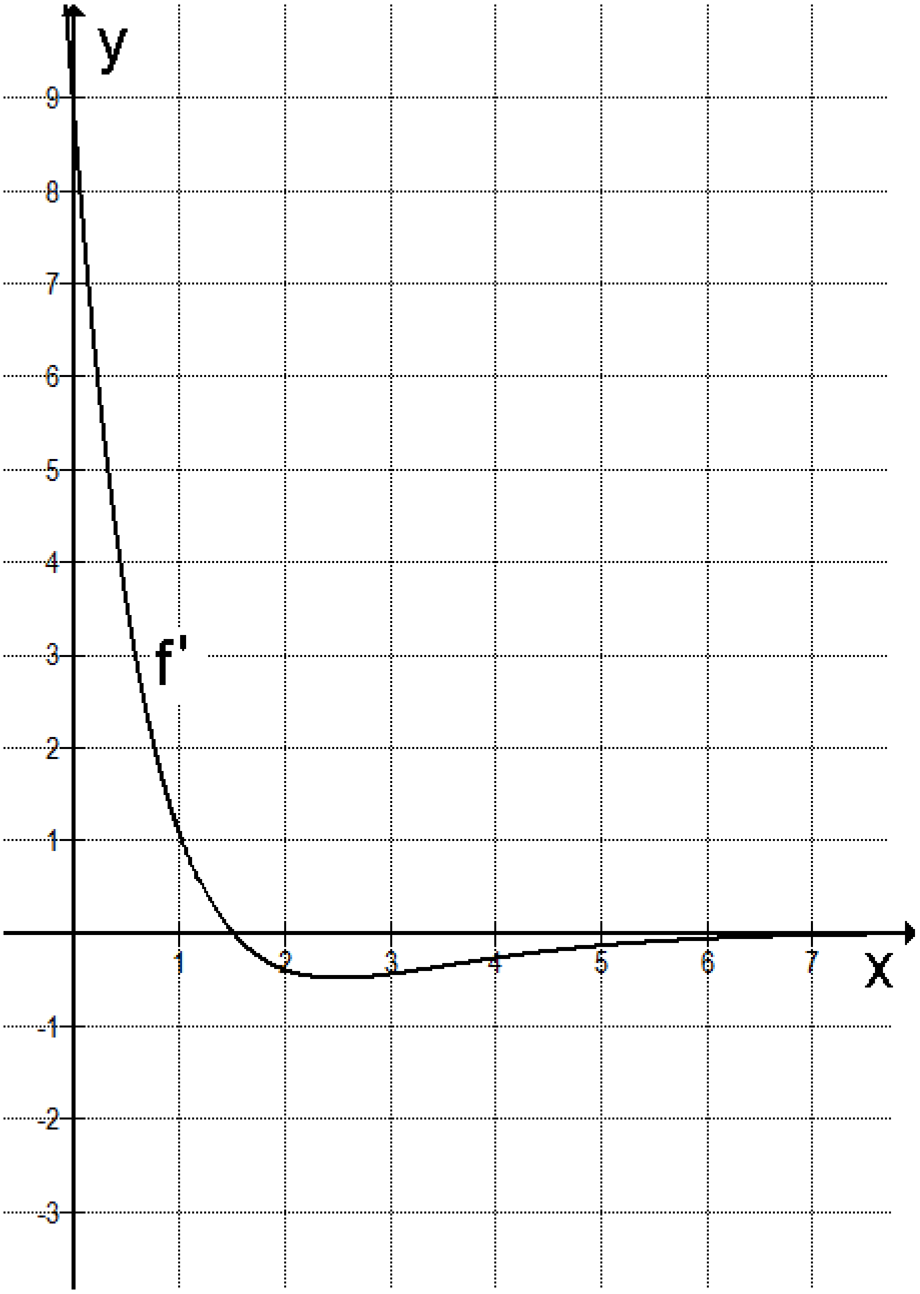
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

j) Untersuchen Sie, ob es eine Stelle x_T gibt, an der die Tangente an den Graphen von f parallel zu der Tangente an den Graphen von f' verläuft.

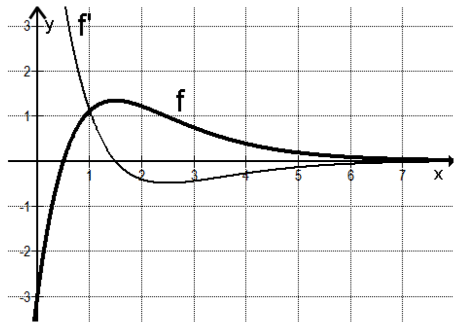
Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	Summe
BE	2	2	4	3	3	4	5	3	4	5	35

Anlage auf der nächsten Seite

Anlage zur Aufgabe 2.1: Exponentialfunktion



Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.1: Exponentialfunktion

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x)=0 \;\Rightarrow\; 6x-3=0 \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}$, also $S_x\left(\frac{1}{2}\,|\,0\right)$. Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)=-3$, also. $S_y\left(0\,|\,-3\right)$.	2
b)	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	2
c)	$f'(x)=6\cdot e^{-x}+(6x-3)\cdot(-e^{-x})=(-6x+9)\cdot e^{-x}$ $f'(x)=0$: Extremstelle $x=\frac{3}{2}$ $f\left(\frac{3}{2}\right)=6\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx 1{,}34$ Extrempunkt: $E\left(\frac{3}{2}\,|\,6\cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)$ oder $E\left(1{,}5\,|\,1{,}34\right)$.	4
d)	Die Funktionswerte der 1. Ableitungsfunktion von f sind für $x<\frac{3}{2}$ positiv und für $x>\frac{3}{2}$ negativ. Demzufolge liegt ein lokales Maximum vor.	3
e)		3
f)	$f'(1)=f(1)=3\cdot e^{-1}\approx 1{,}10$; Ansatz: $t(x)=3e^{-1}\cdot x+n \;\Rightarrow\; n=0$. Gleichung der Tangente: $t(x)=3e^{-1}\cdot x$. Schnittwinkel mit der x-Achse: $\tan(\alpha)=f'(1) \Leftrightarrow \alpha\approx 47{,}8°$	4
g)	Der senkrechte Abstand der Graphen von f und f' wird an dem Maximum der Funktion g mit $g(x)=f(x)-f'(x)=(12x-12)e^{-x}$ maximal. $g'(x)=12\cdot e^{-x}+(12x-12)\cdot(-e^{-x})=(-12x+24)\cdot e^{-x}$ $g'(x_M)=0$: Extremstelle $x_M=2$ $g(2)=12\cdot e^{-2}\approx 1{,}62$ An der Stelle $x_M=2$ ist der Abstand maximal, er beträgt ca. 1,62 LE.	5

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
h)	Die Funktion F ist genau dann eine Stammfunktion der Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$. Die Gleichung der gesuchten Stammfunktion H ist $H(x) = (6x-3)e^{-x} + 20$.	3
i)	$\int_1^5 ((6x-3)\cdot e^{-x})dx = [(-6x-3)\cdot e^{-x}]_1^5 = -33e^{-5} - (-9e^{-1}) \approx 3{,}09$ Der Inhalt der Fläche beträgt ca. 3,1 FE.	4
j)	Wenn es eine Stelle x_T gibt, an der die Tangente an den Graphen von f parallel zu der Tangente an den Graphen von f' verläuft, dann muss gelten $f'(x) = f''(x)$. $f''(x) = -6\cdot e^{-x} + (-6x+9)\cdot(-e^{-x}) = (-6x-15)\cdot e^{-x}$ $f'(x) = f''(x) \Leftrightarrow (-6x+9)e^{-x} = (6x-15)e^{-x} \Leftrightarrow x = 2$ An der Stelle $x_T = 2$ ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur Tangente an den Graphen von f'.	5
	Summe der BE	35

Teilaufgabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
a	2	x		
b	2	x		
c	4		x	
d	3		x	
e	3	x		
f	4		x	
g	5			x
h	3		x	
i	4	x		
j	5			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
11	14	10

Aufgabe 2.2: Teststrecke

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = -0{,}01 \cdot (x-8)(x+1)^2$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Nullstellen von f an.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionsgleichung von f auch in folgender Form geschrieben werden kann: $f(x) = -\frac{1}{100}x^3 + \frac{3}{50}x^2 + \frac{3}{20}x + \frac{2}{25}$.

Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

c) Ermitteln Sie die Lage und die Art der Extrempunkte des Graphen von f.

d) Skizzieren Sie im Bereich $-2 \le x \le 8$

- den Graphen von f und
- den Graphen von f'

in dem Koordinatensystem in der Anlage.

e) Der Graph von f' hat einen Hochpunkt.

Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen Sie daraus für den Graphen von f ziehen können.

Auf einem Versuchsgelände wird eine Teststrecke errichtet, deren Profillinie durch den Graphen der Funktion f im Intervall $-1 \le x \le 8$ modelliert werden kann.

Die Fahrbahn ist 5 m breit (siehe Abbildung 1).

1 LE entspricht jeweils 1 m.

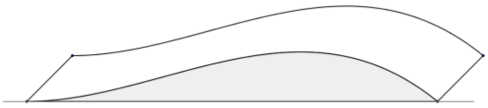


Abbildung 1

f) Damit der Übergang bei $x = 8$ nicht so einen scharfen Knick hat, soll die Profillinie der Teststrecke verändert werden. Dazu wird die Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P\left(6 \mid f(6)\right)$ verwendet.

Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Gleichung $t(x) = -0{,}21x + 2{,}24$ hat.

Zeichnen Sie die Tangente im Koordinatensystem in der Anlage ein.

g) Die ursprüngliche Teststrecke wurde aus Erde aufgeschüttet. Für die neue Aufschüttung unterhalb der Tangente im Bereich $6 \le x \le 10{,}67$ wird weitere Erde benötigt.

Ermitteln Sie, wie viel Erde (in Kubikmeter) erforderlich ist, um die zusätzliche Aufschüttung unterhalb der Geraden t im Bereich $6 \le x \le 10{,}67$ herzustellen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

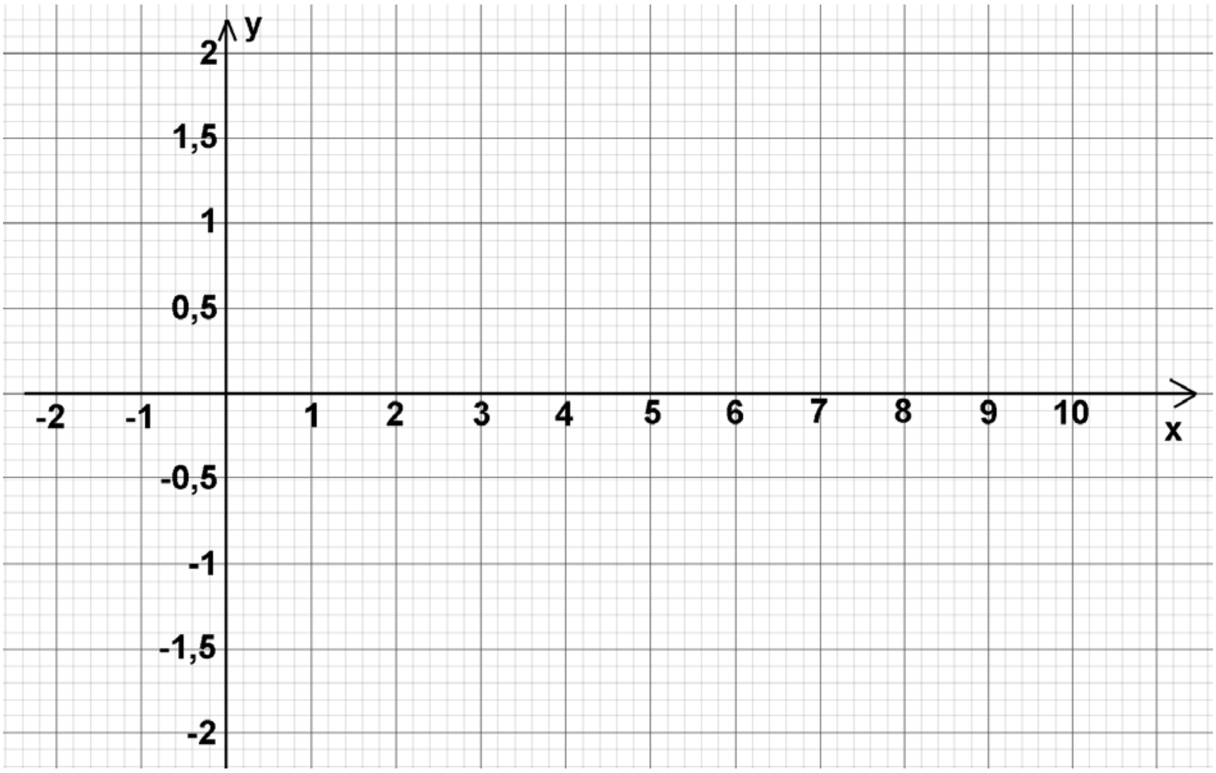
Aufgabe 2.2: Teststrecke (Fortsetzung)

h) Nach der Änderung der Profillinie mit Hilfe der Tangente t hat die Teststrecke den größten Steigungswinkel bei $x = 2$. Das Gefälle der Tangente t hat einen geringeren Winkel.

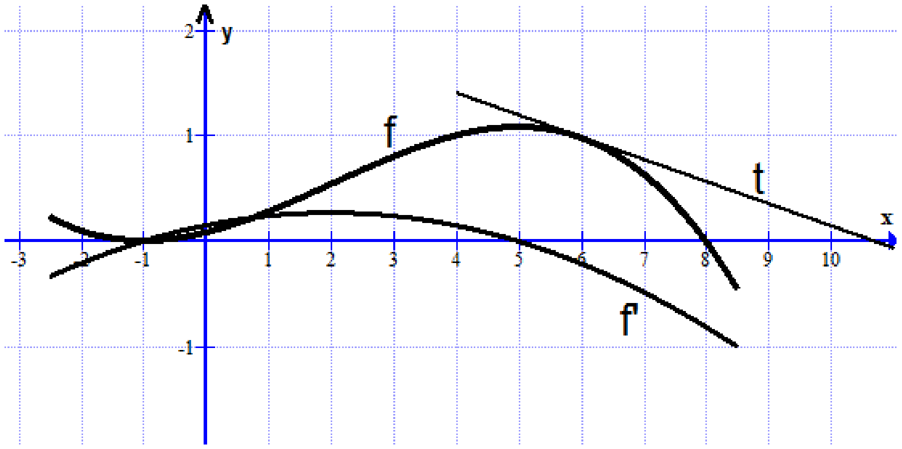
Ermitteln Sie, an welcher Stelle (mit $x > 5$) man eine Tangente t_{neu} ansetzen müsste, damit ihr Gefälle genauso groß ist wie die größte Steigung der Profillinie.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben									
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	2	5	9	4	2	3	5	5	35

Anlage zur Aufgabe 2.2: Teststrecke



Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.2: Teststrecke

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	$0=-0{,}01\cdot(x-8)(x+1)^2 \Rightarrow x_1=8 \wedge x_2=-1$	2
b)	$f(x)=-0{,}01\cdot(x-8)(x+1)^2=(-0{,}01x+0{,}08)(x^2+2x+1)$ $f(x)=-0{,}01x^3+0{,}06x^2+0{,}15x+0{,}08$ $f(x)=-\frac{1}{100}x^3+\frac{3}{50}x^2+\frac{3}{20}x+\frac{2}{25}$ Es gilt: $f(x)\to+\infty$ für $x\to-\infty$ und $f(x)\to-\infty$ für $x\to\infty$.	3 2
c)	$f'(x)=-\frac{1}{100}\left(3x^2-12x-15\right)=-\frac{3}{100}\left(x^2-4x-5\right)$ $f''(x)=-\frac{3}{100}(2x-4)$ $f'(x)=0$: Extremstelle $x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_1=-1$ und $x_2=5$ $f''(-1)>0$; $f(-1)=0$; Tiefpunkt $T(-1\mid 0)$. $f''(5)<0$; $f(5)\approx 1{,}08$; Hochpunkt $H(5\mid 1{,}08)$.	4 5
d)		4
e)	An der Stelle, an der der Hochpunkt des Graphen von f‘ liegt, liegt ein Wendepunkt des Graphen von f. Dort hat die Steigung des Graphen von f eine relatives Extremum.	2
f)	Es ist $f'(6)=-0{,}21=m_t$ und $f(6)=0{,}98=t(6)$, also ist t die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P\left(6 \mid f(6)\right)$. Einzeichnen der Tangente (siehe Skizze zu d).	3

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
g)	Ansatz für die Querschnittsfläche $A = \int\limits_{6}^{10,67} t(x)\,dx - \int\limits_{6}^{8} f(x)\,dx$. Das erste Integral ist gleich dem Flächeninhalt des rechtwinkeligen Dreiecks mit den Kathetenlängen $10,67 - 6 = 4,67$ und $t(6) = 0,98$, also $A_1 = \frac{4,67 \cdot 0,98}{2} \approx 2,29\ \text{m}^2$ $A_2 = \int\limits_{6}^{8} f(x)dx = \left[-\frac{1}{400}x^4 + \frac{1}{50}x^3 + \frac{3}{40}x^2 + \frac{2}{25}x\right]_6^8 \approx 1,18\ \text{m}^2$ Also $V \approx (2,29 - 1,18)\text{m}^2 \cdot 5\text{m} = 5,55\text{m}^3$.	5
h)	Im Wendepunkt hat der Graph von f die Steigung $f'(2) = \frac{27}{100}$. Damit eine Tangente den gleichen Steigungswinkel hat, muss sie demnach mit eine Steigung von $-\frac{27}{100}$ haben. Für die Stelle, an der diese Tangente den Graphen berührt, muss also gelten: $f'(x) = -\frac{27}{100}$ $-\frac{3}{100}\left(x^2 - 4x - 5\right) = -\frac{27}{100} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x - 14 = 0$ $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{18}$; $x_1 \approx 6,24$ (Die andere Lösung erfüllt nicht die Bedingung $x > 5$).	5
	Summe der BE	35

Teilauf-gabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
a	2	x		
b	5	x		
c	9		x	
d	4	x		
e	2		x	
f	3		x	
g	5			x
h	5			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
11	14	10

Aufgabe 3.1: Ebenen

Gegeben sind eine Ebene E_1 durch die Parametergleichung

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}$$

und eine Ebene E_2 durch $E_2 : 6x + 2y + 9z = 18$.

a) Bestimmen Sie für die Ebene E_1 eine Ebenengleichung in Koordinatenform.

[Kontrollergebnis: $E_1 : 12x + 4y + 9z = 36$]

b) Geben Sie die drei Schnittpunkte der Ebene E_1 mit den Koordinatenachsen an.

c) Ermitteln Sie den Abstand der Ebene E_1 zum Koordinatenursprung.

d) Begründen Sie, dass die beiden Ebenen nicht zueinander parallel sind.
Ermitteln Sie die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2.

e) Die Punkte $A(3|0|0)$, $B(0|9|0)$, $C(0|0|4)$ und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte einer Pyramide.

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.

f) Auf der Geraden g_{AB} durch die Punkte A und B gibt es einen Punkt P mit der Eigenschaft, dass die Gerade g_{PC} durch P und C senkrecht zur Geraden g_{AB} verläuft.

Ermitteln Sie den Punkt P.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	3	2	3	4	3	5	20

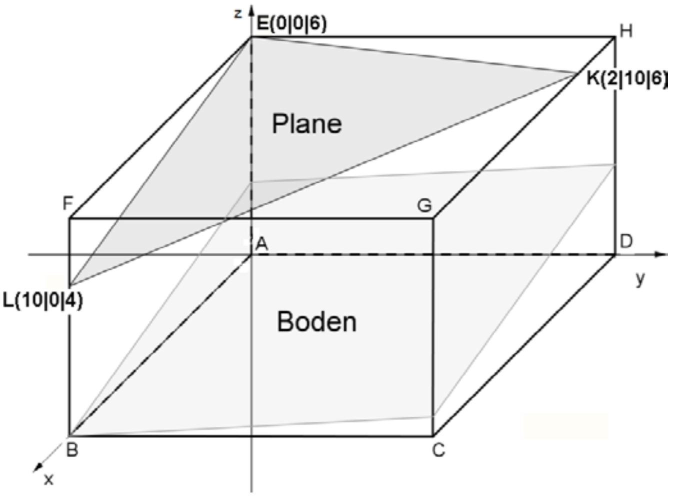
Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.1: Ebenen

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	Bestimmen der Gleichung $E_1: 12x + 4y + 9z = 36$	3
b)	$S_x(3\|0\|0)$; $Sy(0\|9\|0)$; $S_z(0\|0\|4)$	2
c)	$d(E_1,O) = \left\| \frac{1}{\sqrt{12^2+4^2+9^2}}(12\cdot 0 + 4\cdot 0 + 9\cdot 0 - 36) \right\| = \frac{36}{\sqrt{241}} \approx 2{,}32$ [LE]	3
d)	Die beiden Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 sind nicht kollinear, da $\begin{pmatrix}12\\4\\9\end{pmatrix} \neq k\cdot\begin{pmatrix}6\\2\\9\end{pmatrix}$. Deshalb sind die Ebenen E_1 und E_2 nicht parallel. $E_1 \cap E_2: 6(3-3r+3s) + 2(9r) + 9(-4s) = 18 \Leftrightarrow s = 0$ Die Gleichung der Schnittgerade s lautet: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix}$.	4
e)	$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 9\right)\cdot 4 = 18$ [VE]	3
f)	Eine Gleichung der Geraden g_{AB} ist $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix}$. Für einen Punkt P auf g_{AB} ist also $\overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-3r\\9r\\4\end{pmatrix}$. Also gilt $\overrightarrow{PC}\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-3r\\9r\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\0\end{pmatrix} = -9 + 90r = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{10}$, also $P(2{,}7\|0{,}9\|0)$.	5
	Summe der BE	20

Teilaufgabe	BE	Anforderungsbereich I	II	III
a	3	x		
b	2	x		
c	3		x	
d	4	x	x	
e	3		x	
f	5			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
6	9	5

Aufgabe 3.2: Theater



Eine ehemalige Lagerhalle soll für ein Theater umgebaut werden.

Die Lagerhalle hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 10 m. Die Grundfläche liegt in der x-y-Ebene.

Die Höhe der Halle beträgt 6 m. Als „Himmel" wird, wie in der Abbildung modellhaft dargestellt ist, eine dreieckige Plane aufgespannt.

Gegeben sind die Punkte $E(0|0|6)$, $K(2|10|6)$ und $L(10|0|4)$.
1 LE = 1 m.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte H und G an.

Untersuchen Sie, ob die Plane die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.

b) Die Plane liegt in einer Ebene E_P.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_P in Parameter- und in Koordinatenform.

[Kontrollergebnis: $E_P: 5x - y + 25z = 150$]

c) In die Lagerhalle wird ein Boden für den Zuschauerraum eingebaut. Der Boden soll in der Ebene E_B liegen, die parallel zur Plane und durch den Punkt B verläuft.

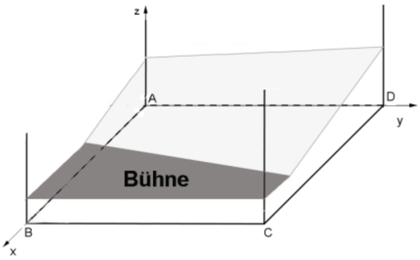
Begründen Sie, dass die Ebene E_B durch die Gleichung $E_B: 5x - y + 25z = 50$ beschrieben werden kann.

Ermitteln Sie, wie groß die maximale Höhe des Bodens über der Grundfläche ist.

d) Begründen Sie, dass der Abstand der Plane vom Boden des Zuschauerraums kleiner als 4 m ist.

e) Für die Schauspieler wird schließlich eine Bühne eingebaut. Der Boden der Bühne verläuft parallel zur Grundfläche der Halle in einer Höhe von 0,8 m soweit, bis sie auf den Boden des Zuschauerraums trifft.

Berechnen Sie die Größe der trapezförmigen Bühnenfläche.



Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben						
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d	e)	Summe
BE	4	4	4	3	5	20

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.2: Theater

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	$H(0\mid 10\mid 6)$ und $G(10\mid 10\mid 6)$ $\lvert\overline{EK}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}2\\10\\0\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{104}$ und $\lvert\overline{EL}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}10\\0\\-2\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{104}$. Also ist das Dreieck ELK gleichschenklig.	4
b)	$E_P : \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r\cdot\overrightarrow{LE} + s\cdot\overrightarrow{LK}$ Eine Gleichung in Parameterform ist $E_P : \vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\4\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-10\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-8\\10\\2\end{pmatrix}$ Daraus ergibt sich das Gleichungssystem $\text{I}\quad x = 10 - 10r - 8s$ $\text{II}\quad y = 10s$ $\text{III}\quad z = 4 + 2r + 2s$ Eliminierung der Parameter: $10x + 8y = 100 - 100r$ $y - 5z = -20 - 10r$ ergibt $E_P : 5x - y + 25z = 150$	4
c)	Da der Boden des Zuschauerraums parallel zur Plane ist, liegt er in der Ebene mit der Gleichung $E_B : 5x - y + 25z = d$. Durch Einsetzen der Koordinaten von B erhält man $E_B : 5x - y + 25z = 50$. Die größte Höhe des Bodens über der Grundfläche wird an dem Eckpunkt des Bodens angenommen, der auf der Kante DH liegt. Dafür gilt: $x = 0$ und $y = 10$, also $5\cdot 0 - 10 + 25z = 50 \Rightarrow z = 2{,}4$. Die größte Höhe des Bodens über der Grundfläche beträgt 2,4 m	4
d)	L ist ein Punkt der Plane, B ist ein Punkt des Bodens. Die Punkte L und B haben einen Abstand von genau 4 m. Die Strecke von L nach B verläuft aber nicht senkrecht zu den beiden Ebenen, also ist sie länger als der Abstand der beiden Ebenen. (Eine analoge Begründung ist mit den Punkten $A'(0\mid 0\mid 2) \in P_B$ und E möglich. Auch das Berechnen des Abstands ist zulässig.)	3

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
e)	Bestimmung einer Gleichung der Schnittgeraden s von E_B und der Bühnenebene: Mit z = 0,8 gilt also $5x - y + 25 \cdot 0,8 = 50$. Für $x = r$ ergibt sich $y = -30 + 5r$ und somit die Geradengleichung $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0,8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Um die Größe der Bühnenfläche zu bestimmen, benötigt man die x-Werte der Schnittpunkte der Geraden s mit den Seitenflächen ABFE und DCGH des Theaters. Für den Schnittpunkt S_{ABFE} gilt: $y = 0$: $30 = 5r$; $r = 6$, also $x = 6$. Für den Schnittpunkt S_{DCGH} gilt: $y = 10$: $40 = 5r$; $r = 8$, also $x = 8$. Also haben die parallelen Trapezseiten Längen von 4 bzw. 2 LE. $A = \frac{4+2}{2} \cdot 10 = 30$. Die Bühne hat eine Fläche von 30 m².	5
	Summe der BE	20

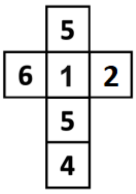
Teilauf-gabe	BE	Anforderungsbereich		
		I	II	III
a	4	x		
b	4	x	x	
c	4		x	
d	3		x	
e	5			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
6	9	5

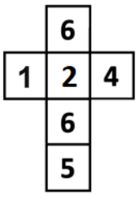
Aufgabe 4.1: Würfel

Luisa und Pedro finden bei einem Spiel zwei besondere Würfel. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach einem Wurf eine Seite oben liegt, ist für alle sechs Seiten gleich groß.
Die sechs Seiten sind jedoch bei den beiden Würfeln unterschiedlich beschriftet:

5er-Würfel



6er-Würfel



a) Der 6er-Würfel wird 10-mal geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
A: „Bei genau 4 Würfen wird eine 6 gewürfelt."
B: „Bei keinem Wurf wird eine 6 gewürfelt."

b) Luisa bekommt zu Beginn des Spiels den 6er-Würfel. Wenn sie eine 6 würfelt, darf sie anfangen. Sie hat dazu höchstens drei Versuche. Wenn Luisa innerhalb der drei Versuche keine 6 würfelt, darf Pedro anfangen.

Erstellen Sie ein Baumdiagramm für diesen Sachzusammenhang.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Luisa anfangen darf.

c) Berechnen Sie, wie oft mit dem 6er-Würfel mindestens gewürfelt werden müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine 6 zu würfeln.

d) Im Verlauf des Spiels werden beide Würfel verwendet. Dabei werden beide Würfel gleichzeitig geworfen.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis:
C: „Die Augensumme beträgt 11."

Am Ende des Spiels muss man mit drei Würfen insgesamt genau die Augensumme 15 erhalten. Luisa benutzt nur den 5er-Würfel und Pedro nur den 6er-Würfel.

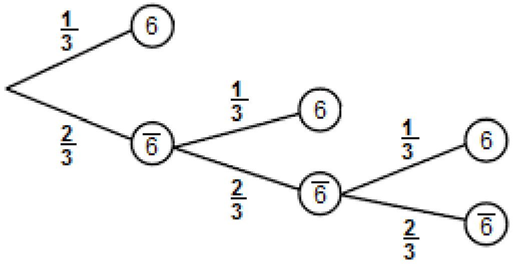
e) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Luisa die Augensumme 15 erhält, $\frac{5}{54}$ beträgt.

f) Pedro behauptet, dass die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 15 zu erhalten, mit dem 6er-Würfel größer ist.

Begründen Sie, dass Pedros Behauptung falsch ist.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	4	4	4	2	3	3	20

Erwartungshorizont zu Aufgabe 4.1: Würfel

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	$P(A)=B(10;\frac{1}{3};4)=\binom{10}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\approx 0{,}2276=22{,}76\,\%$ $P(B)=\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\approx 0{,}0173=1{,}73\,\%$	4
b)	Baumdiagramm  $P(\text{"bei höchstens drei Würfen eine 6"})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{19}{27}$	4
c)	$P(X\geq 1)\geq 0{,}95\ \Rightarrow\ 1-P(X=0)\ \geq 0{,}95$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\leq 0{,}05\Rightarrow n\geq\frac{\ln 0{,}05}{\ln\frac{2}{3}}\approx 7{,}39$ Es muss mindestens 8-mal gewürfelt werden, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens eine 6 zu würfeln, mindestens 95 % beträgt.	4
d)	Die Augenzahl 11 kann nur durch die Kombinationen 6-5 oder 5-6 erreicht werden. $P(C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{36}\approx 0{,}1389=13{,}89\,\%$	2
e)	Die Augensumme 15 kann mit drei Würfen nur durch die Kombinationen 4-5-6 (in beliebiger Reihenfolge) und 5-5-5 erzielt werden. $P(\text{"4-5-6"})=6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}=\frac{3}{54}$; $P(\text{"5-5-5"})=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{27}=\frac{2}{54}$ $P(\text{"Die Augensumme ist 15"})=P(\text{"4-5-6"})+P(\text{"5-5-5"})=\frac{5}{54}$	3
f)	Die Wahrscheinlichkeit, die Augenzahlen 4-5-6 (in beliebiger Reihenfolge) zu würfeln, ist für beide Würfel gleich. Für den 5er-Würfel ist die Wahrscheinlichkeit, 5-5-5 zu würfeln, wesentlich größer als für den 6er-Würfel. Daher ist Pedros Behauptung falsch.	3
	Summe der BE	20

Teilaufgabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
a	4	x		
b	4		x	
c	4			x
d	2	x		
e	3		x	
f	3		x	

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
6	10	4

Aufgabe 4.2: Unternehmen

In einem großen Unternehmen sind $\frac{1}{3}$ der Beschäftigten weiblich.

1 Es werden 50 Beschäftigte zufällig ausgewählt. Die Anzahl der weiblichen Beschäftigten unter den ausgewählten kann durch eine binomialverteilte Zufallsgröße X beschrieben werden.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 17 der ausgewählten Beschäftigten weiblich sind.

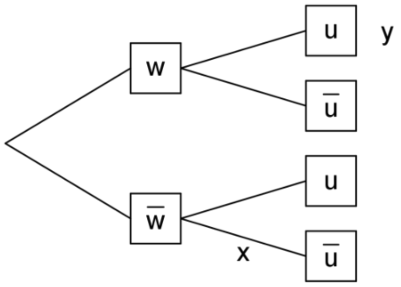
b) Beschreiben Sie die Bedeutung der folgenden mathematischen Aussage im Sachzusammenhang:

$$\binom{50}{13}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{13}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{37}+\binom{50}{14}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{14}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{36}\approx 0{,}158$$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 50 ausgewählten Beschäftigten die Anzahl derjenigen, die nicht weiblich sind, viermal so groß ist wie die Anzahl der weiblichen.

d) Begründen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X für 16 oder 17 den größten Wert hat.

2 Unter allen Beschäftigten wurde eine Befragung zur Zufriedenheit am Arbeitsplatz durchgeführt. Dabei ergab sich, dass 3,5 % der weiblichen und 10,5 % der anderen Beschäftigten unzufrieden sind. Unter allen Beschäftigten wird eine Person zufällig ausgewählt. Das abgebildete Baumdiagramm stellt den Sachverhalt dar.



a) Ermitteln Sie die Werte von x und y.

b) Die ausgewählte Person ist an ihrem Arbeitsplatz unzufrieden.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie nicht weiblich ist.

[Hinweis: Nutzen Sie dafür z. B. eine Vierfeldertafel.]

c) Für eine Abteilung des Unternehmens ergab die Befragung, dass 4 % der weiblichen und 10 % der anderen Beschäftigten an ihrem jeweiligen Arbeitsplatz unzufrieden sind. Unter allen Beschäftigten dieser Abteilung ist der Anteil der unzufriedenen Beschäftigten, die nicht weiblich sind, fünfmal so groß wie der Anteil der unzufriedenen weiblichen Beschäftigten. Bestimmen Sie für diese Abteilung den Anteil der weiblichen Beschäftigten.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	1 a)	b)	c)	d)	2 a)	b)	c)	Summe
BE	2	3	2	3	3	3	4	20

Anlage zu Aufgabe 4.2: Unternehmen

Summierte Binomialverteilungen

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze enthalten nach dem Runden 0 bzw. 1,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert).

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
50	**0**	0769	0052	0001								**49**	50
	1	2794	0338	0012	0002							**48**	
	2	5405	1117	0066	0013	0001						**47**	
	3	7604	2503	0238	0057	0005						**46**	
	4	8964	4312	0643	0185	0021	0002					**45**	
	5	9622	6161	1388	0480	0070	0007	0001				**44**	
	6	9882	7702	2506	1034	0194	0025	0005				**43**	
	7	9968	8779	3911	1904	0453	0073	0017				**42**	
	8	9992	9421	5421	3073	0916	0183	0050	0002			**41**	
	9	9998	9755	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0001		**40**	
	10		9906	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0002		**39**	
	11		9968	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0006		**38**	
	12		9990	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0018	0002	**37**	
	13		9997	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0045	0005	**36**	
	14		9999	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0104	0013	**35**	
	15			9943	9692	8369	5692	3690	0955	0220	0033	**34**	
	16			9978	9856	9017	6839	4868	1561	0427	0077	**33**	
	17			9992	9937	9449	7822	6046	2369	0765	0164	**32**	
	18			9997	9975	9713	8594	7126	3356	1273	0325	**31**	
	19			9999	9991	9861	9152	8036	4465	1974	0595	**30**	
	20				9997	9937	9522	8741	5610	2862	1013	**29**	
	21				9999	9974	9749	9244	6701	3900	1611	**28**	
	22					9990	9877	9576	7660	5019	2399	**27**	
	23					9996	9944	9778	8438	6134	3359	**26**	
	24					9999	9976	9892	9022	7160	4439	**25**	
	25						9991	9951	9427	8034	5561	**24**	
	26						9997	9979	9686	8721	6641	**23**	
	27						9999	9992	9840	9220	7601	**22**	
	28							9997	9924	9556	8389	**21**	
	29							9999	9966	9765	8987	**20**	
	30								9986	9884	9405	**19**	
	31								9995	9947	0675	**18**	
	32								9998	9978	0936	**17**	
	33								9999	9991	9923	**16**	
	34									9997	9967	**15**	
	35									9999	9987	**14**	
	36										9995	**13**	
	37										9998	**12**	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n
		p											

Erwartungshorizont zu Aufgabe 4.2: Unternehmen

<table>
<tr><th>Teil-aufgabe</th><th>Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1 a)</td><td>$P(X \ge 17) = 1 - F(50;\frac{1}{3};16) \approx 0{,}5132 \approx 51{,}3\%$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 50 ausgewählten Beschäftigten 13 oder 14 weiblich sind, beträgt ca. 15,8 %.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$B\left(50;\frac{1}{3};10\right) = \binom{50}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{40} \approx 0{,}0157 \approx 1{,}57\%$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$E(X) = 50 \cdot \frac{1}{3} \approx 16{,}67$
Damit hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ihren größten Wert für eine der beiden natürlichen Zahlen, die 16,67 benachbart sind.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2 a)</td><td>$x = 100\% - 10{,}5\% = 89{,}5\%$, $y = \frac{1}{3} \cdot 0{,}035 \approx 0{,}01$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Vierfeldertafel
<table>
<tr><th></th><th>w</th><th>$\overline{w}$</th><th></th></tr>
<tr><td>u</td><td>**1,17 %**</td><td>**7,00 %**</td><td>**8,17 %**</td></tr>
<tr><td>$\overline{u}$</td><td>*32,16 %*</td><td>*59,67 %*</td><td>*91,83 %*</td></tr>
<tr><td></td><td>**33,33 %**</td><td>**66,67 %**</td><td>**100 %**</td></tr>
</table>
$\frac{7{,}00}{8{,}17} \approx 85{,}7\%$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Bezeichnet man den Anteil der der weiblichen Beschäftigten mit a, so gilt:
$5 \cdot 0{,}04 \cdot a = 0{,}1 \cdot (1-a) \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}$</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td>20</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	BE	Anforderungsbereich		
		I	**II**	**III**
1 a	2	X		
b	3		X	
c	2	X		
d	3		X	
2 a	3	X		
b	3		X	
c	4			X

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
7	9	4