Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik
Leistungskurs

Hinweise

Die Prüflinge erhalten zu Beginn alle Aufgabenstellungen.

Die Abiturprüfung beginnt für alle Prüflinge mit der Bearbeitung der Aufgabe 1 zum hilfsmittelfreien Teil in einem Umfang von 70 Minuten.

Hinweise zum hilfsmittelfreien Teil (Aufgabenstellung 1)

Die Lösungen der Aufgaben aus diesem Teil der Prüfung werden nach **70** Minuten eingesammelt. Prüflinge, die für die Aufgabe 1 weniger Zeit benötigen, können bereits mit der Bearbeitung der weiteren Wahlaufgaben beginnen, vorerst ohne die Nutzung von Hilfsmitteln. Nach der vollständigen Abgabe der Lösungen der Aufgabe 1 durch alle Prüflinge beginnt die Arbeit an den weiteren Aufgaben unter Verwendung von Formelsammlung und Rechner bzw. CAS-Rechengerät.

Hinweise zu den Erwartungshorizonten

Die Beschreibungen der erwarteten Leistungen enthalten keine vollständigen Lösungswege, sondern teilweise nur kurze Angaben.

Für jede Teilaufgabe ist die Gesamtanzahl der für diese Aufgabe zu erreichenden Bewertungseinheiten zu entnehmen. Die Summe der Bewertungseinheiten pro Teilaufgabe ist verbindlich.

Für andere Lösungswege oder Lösungsansätze, die logisch dargestellt werden und zu richtigen Zwischen- oder Endergebnissen führen, sind die vorgesehenen Bewertungseinheiten entsprechend zu vergeben.

Für richtig vollzogene Teilschritte, die auf falschen Zwischenergebnissen basieren, ist im Allgemeinen die vorgesehene Anzahl von Bewertungseinheiten zu erteilen. Werden dadurch jedoch die Teilschritte vereinfacht oder kommentarlos sinnlose Endergebnisse angegeben, ist eine angemessen verminderte Anzahl dieser Bewertungseinheiten zu erteilen.

In der Regel sind die Bewertungseinheiten nicht einzelnen Teilleistungen kleinschrittig zugeordnet, so dass didaktische Aspekte bei der Bewertung berücksichtigt werden können.

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 1 für Prüflinge

Hilfsmittel:	Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache
nicht für Aufgabenstellung 1:	Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen
Gesamtbearbeitungszeit:	300 Minuten inkl. Lese- und Auswahlzeit

Aufgabenstellung 1

Thema/Inhalt: hilfsmittelfreier Teil

Hinweis: Hier gibt es keine Wahlmöglichkeiten.

Die Aufgabenstellung und die Lösungen zum hilfsmittelfreien Teil werden nach 70 Minuten abgegeben.

Mit der Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen kann bereits zuvor begonnen werden.

In jedem Fall können die zugelassenen Hilfsmittel erst nach Ablauf der 70 Minuten verwendet werden.

Im Teil 2 des Aufgabenvorschlags sind enthalten:

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

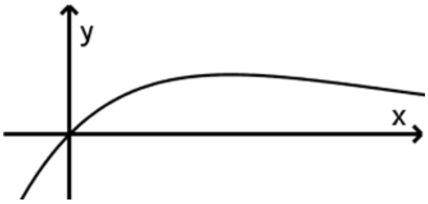
Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

1 Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

1.1 Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$.
Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.



a) Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann.

b) Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt.
Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.

1.2 Analysis

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

b) Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.3 Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $C(2\,|\,3\,|\,3)$ und die Gerade g mit

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\3\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};\ \mu\in\mathbb{R}$ gegeben.

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(6\,|\,3\,|\,-1)$ und B.

a) Zeigen Sie, dass der Punkt C nicht auf g liegt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B, der auf g liegt und gleich weit wie der Punkt A von C entfernt ist.

1.4 Analytische Geometrie

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der xy-Ebene liegt. $M(8\,|\,5\,|\,10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

a) Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5\,|\,1\,|\,0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

b) Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten.
Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil (Fortsetzung)

1.5 Stochastik

Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt.

Vor Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 Euro geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt.

b) Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen.
Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung.

1.6 Stochastik

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

a) Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschiedenen Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2} \cdot 14$ berechnet werden.

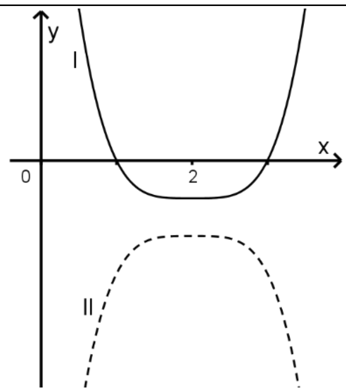
Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang.

b) In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein.
Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Aufgaben													
Aufgabe	1.1 Analysis 1		1.2 Analysis 2		1.3 Geometrie 1		1.4 Geometrie 2		1.5 Stochastik 1		1.6 Stochastik 2		
Teilaufgabe	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	Summe
BE	2	3	1	4	2	3	2	3	2	3	2	3	30

Erwartungshorizont zu den Aufgaben zum hilfsmittelfreien Teil

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
Aufgabe 1.1 – Analysis 1		
a)	$\frac{1}{2}a \cdot f(a) = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot e^{-a} = \frac{1}{2}a^2e^{-a}$	2
b)	Betrachtet man $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ als Term einer Funktion A, so gilt für $a > 0$: $A'(a) = ae^{-a} - \frac{1}{2}a^2e^{-a} = \frac{1}{2}ae^{-a} \cdot (2-a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$	3
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.2 – Analysis 2		
a)	$F'(x) = 2 \cdot (x-2)^3 = f_2(x)$	1
b)	Die Terme aller Stammfunktionen von f_a lassen sich durch $F_{a,b}(x) = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + b$ mit $b \in \mathbb{R}$ darstellen. Für $a > 0$ hat $F_{a,b}$ stets Funktionswerte, die nicht negativ sind (vgl. Graph I). Für $a < 0$ gibt es stets Werte von b, sodass $F_{a,b}$ nur negative Funktionswerte hat (vgl. Graph II).  	4
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.3 – Geometrie 1		
a)	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \mu = -4 \\ \Rightarrow \mu = 0 \\ \Rightarrow 3 = -1 \end{matrix}$ Widerspruch, also $C \notin g$	2

Teilaufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
b)	Hilfsebene durch C mit $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad H: x+y=5$ Schnittpunktansatz: Gerade - Ebene $6+\mu+3+\mu=5=9+2\mu$ $\mu=-2$ $M(4\,\vert\,1\,\vert\,-1)$ Es gilt: $\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OB}$ $B(2\,\vert\,-1\,\vert\,-1)$	3
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.4 – Geometrie 2		
a)	P liegt in der xy-Ebene. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist $N(8\,\vert\,5\,\vert\,0)$. Es gilt $\left\vert\overrightarrow{NP}\right\vert=\left\vert\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\right\vert=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$.	2
b)	$S(5\,\vert\,1\,\vert\,10)$ $\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{SM}=\begin{pmatrix}8\\5\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\9\\10\end{pmatrix}$, d. h. $T(11\,\vert\,9\,\vert\,10)$.	3
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.5 – Stochastik 1		
a)	$1-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{8}$	2
b)	$\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot x=\frac{5}{16}\cdot x=5\,€\Leftrightarrow x=16\,€$	3
	Summe der BE	5

Aufgabe 1.6 – Stochastik 2		
a)	Der erste Faktor gibt die Anzahl der Möglichkeiten an, zwei der drei Farben auszuwählen, der zweite die Anzahl der Möglichkeiten für die Anzahl der Tulpen einer der beiden Farben.	2
b)	Es gibt eine Möglichkeit, den Strauß aus jeweils fünf Tulpen der drei Farben, und $3 \cdot 2$ Möglichkeiten, den Strauß aus vier Tulpen einer ersten Farbe, fünf Tulpen einer zweiten Farbe und sechs Tulpen der dritten Farbe zusammenzustellen – insgesamt also sieben Möglichkeiten.	3
	Summe der BE	5

Teilaufgabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
1.1 a	2	x		
1.1 b	3		x	
1.2 a	1	x		
1.2 b	4		x	x
1.3 a	2	x		
1.3 b	3		x	
1.4 a	2	x	x	
1.4 b	3	x	x	
1.5 a	2	x		
1.5 b	3		x	
1.6 a	2	x	x	
1.6 b	3			x

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2020

Mathematik

Leistungskurs

Aufgabenvorschlag Teil 2 für Prüflinge

Hilfsmittel:

Nachschlagewerk zur Rechtschreibung der deutschen Sprache

Formelsammlung, die an der Schule eingeführt ist

Taschenrechner, die nicht programmierbar und nicht grafikfähig sind und nicht über Möglichkeiten der numerischen Differenziation oder Integration oder des automatisierten Lösens von Gleichungen verfügen

Aufgabenstellung 2

Thema/Inhalt: Analysis

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 2.1 oder 2.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 3

Thema/Inhalt: Analytische Geometrie

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 3.1 oder 3.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabenstellung 4

Thema/Inhalt: Stochastik

Hinweis: Wählen Sie eine der beiden Aufgaben 4.1 oder 4.2 zur Bearbeitung aus.

Aufgabe 2.1: Eingangstor

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit der Gleichung $f_a(x) = -ax^4 + x^2 + \frac{a}{2}$; $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.
Die zugehörigen Graphen sind G_a.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen.

b) Geben Sie das Verhalten von f_a für $x \to \pm\infty$ in Abhängigkeit von a an.

c) Bestimmen Sie rechnerisch für den Graphen der Funktion $f_{0,5}$ die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte.

d) Geben Sie den Schnittpunkt S_y aller Graphen G_a mit der y-Achse an.
Weisen Sie nach, dass dieser stets lokaler Tiefpunkt ist.
$\left[\text{Kontrollergebnis}: f_a'(x) = -2\left(2ax^3 - x\right)\right]$

e) Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a an und begründen Sie diese anhand der in a) bis d) ermittelten Eigenschaften.

In der Abbildung 1 ist der Graph $G_{0,5}$ dargestellt.

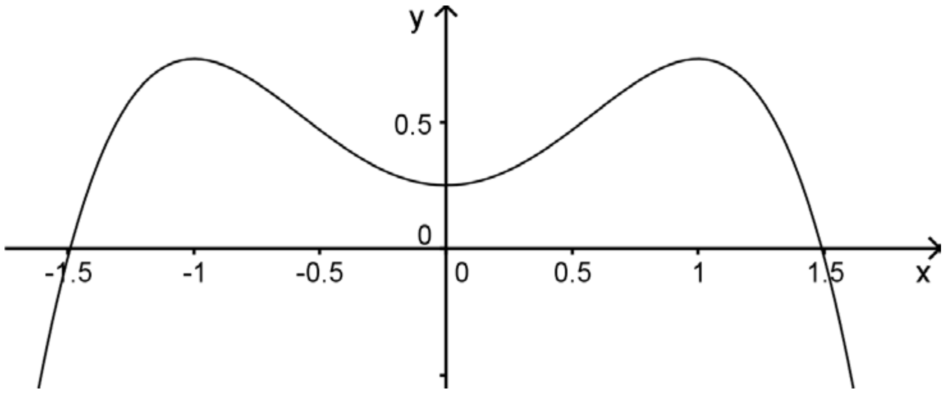


Abb. 1

f) Begründen Sie unter Zuhilfenahme der Abbildung 1, dass es ein zur y-Achse symmetrisches Quadrat geben muss, von dem zwei Eckpunkte auf der x-Achse und zwei Eckpunkte auf $G_{0,5}$ liegen.

g) Ein Punkt auf dem Graphen $G_{0,5}$ im ersten Quadranten und der Koordinatenursprung sind die diagonal gegenüberliegenden Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks. Die waagerechte Rechteckseite ist 0,8 LE lang. Der Graph $G_{0,5}$ teilt dieses Rechteck in zwei Teilflächen.
Ermitteln Sie das Verhältnis der Flächeninhalte dieser Teilflächen.
Hinweis: Runden Sie die Ergebnisse auf 2 Dezimalstellen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.1: Eingangstor (Fortsetzung)

h) Die Tangente t im Punkt $U(1 | f_a(1))$ an den Graphen G_a und die Senkrechte zur Tangente t im Punkt U schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein.

Ermitteln Sie einen Parameterwert a so, dass das Dreieck gleichschenklig ist und die Basis auf der x-Achse liegt.

Für die folgende Teilaufgabe wird die Funktion f_2 mit $f_2(x) = -2x^4 + x^2 + 1;\ x \in \mathbb{R}$ betrachtet. Der Graph G_2 beschreibt im Intervall $[-1;1]$ die Profillinie für das Eingangstor eines Vergnügungsparks (siehe Abbildung 2). Die x-Achse stellt im Profil die untere Begrenzung dar. Es gilt: $1\,\text{LE} = 3\text{ m}$.

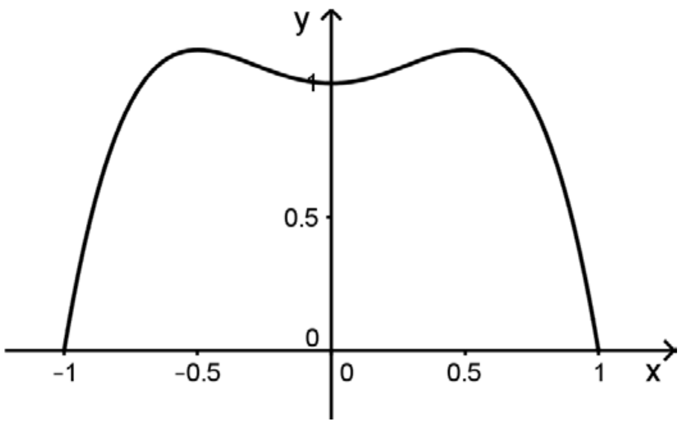


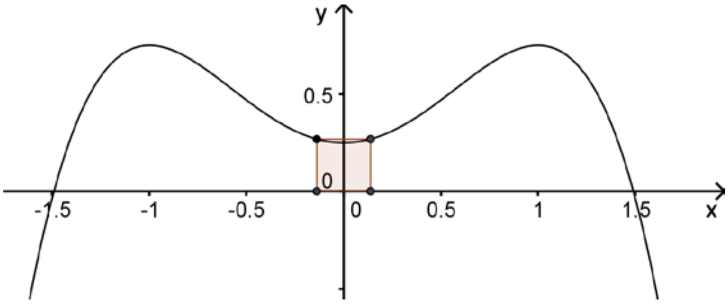
Abb. 2

i) Ermitteln Sie, welche Breite ein Fahrzeug mit einem quaderförmigen Aufbau unterschreiten muss, damit es bei Ausnutzung der maximalen Durchfahrtshöhe gerade noch mittig das Eingangstor passieren kann.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben										
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	Summe
BE	1	4	9	5	5	3	5	4	4	40

Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.1: Eingangstor

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	$f_a(-x) = -a(-x)^4 + (-x)^2 + \frac{a}{2} = -ax^4 + x^2 + \frac{a}{2} = f_a(x)$	1
b)	Für $a > 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = -\infty$. Für $a \leq 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_a(x) = +\infty$.	4
c)	$f_{0,5}(x) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$; $f'_{0,5}(x) = -2x^3 + 2x$; $f''_{0,5}(x) = -6x^2 + 2$ $f'_{0,5}(x) = 0 = -2x^3 + 2x$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$ $f''_{0,5}(0) = 2 > 0$ lokales Minimum $f''_{0,5}(\pm 1) = -4 < 0$ lokales Maximum $f_{0,5}(0) = \frac{1}{4}$; $f_{0,5}(\pm 1) = \frac{3}{4}$; $T\left(0 \mid \frac{1}{4}\right)$; $H_{1;2}\left(\pm 1 \mid \frac{3}{4}\right)$	9
d)	$f_a(0) = \frac{a}{2} \Rightarrow S_y\left(0 \mid \frac{a}{2}\right)$ Nachweis, dass S_y stets lokaler Tiefpunkt ist: $f'_a(x) = -4ax^3 + 2x$; $f''_a(x) = -12ax^2 + 2$; $f'_a(0) = 0$ und $f''_a(0) = 2 > 0$ (unabhängig von a) S_y ist stets lokaler Tiefpunkt	5
e)	Fall 1: $a = 0$; genau eine Nullstelle, da in diesem Fall die Normalparabel entsteht Fall 2: $a > 0$; genau zwei Nullstellen, da der Tiefpunkt (und damit auch die beiden möglichen Hochpunkte) über der x-Achse liegt und die Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ gegen $-\infty$ streben Fall 3: $a < 0$: genau zwei Nullstellen, da der Tiefpunkt unter der x-Achse liegt und die Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ gegen $+\infty$ streben Hochpunkte kann es nicht geben, da dann das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \pm\infty$ anders sein müsste.	5

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
f)	Für einen Eckpunkt des Quadrates mit der Seitenlänge s im 1. Quadranten muss gelten: $f_{0,5}\left(\frac{s}{2}\right) = s$. Dieser Punkt liegt auf dem Graphen der Geraden $y = 2x$, welche einen Schnittpunkt mit dem Graphen $G_{0,5}$ besitzt. Aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen $G_{0,5}$ gibt es im 2. Quadranten ebenfalls einen Eckpunkt des Quadrates auf $G_{0,5}$. 	3
g)	Der Eckpunkt des Rechtecks, der auf dem Graphen $G_{0,5}$ liegt, hat die Koordinaten $\left(\frac{4}{5} \mid \frac{1713}{2500}\right)$ bzw. $(0,8 \mid 0,69)$. Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt $\frac{1713}{3125} \approx 0,55$ FE. $A = \int_0^{0,8} f_{0,5}(x)\,dx = \left[-\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_0^{0,8} = \frac{15839}{46875} \approx 0,34$ FE Der Graph $G_{0,5}$ teilt die Rechteckfläche im Verhältnis $1:0,62$.	5
h)	$m_t = f'_a(1) = -4a + 2$ Tangente und Senkrechte schließen einen rechten Winkel ein. Wenn das beschriebene Dreieck gleichschenklig sein soll, müssen die Basiswinkel 45° groß sein. Tangente und Senkrechte müssen die Anstiege 1 und –1 oder umgekehrt haben. Fall 1: $-4a + 2 = 1 \Leftrightarrow a = 0,25$ oder Fall 2: $-4a + 2 = -1 \Leftrightarrow a = 0,75$ Der Parameterwert ist $a_1 = 0,25$ oder $a_2 = 0,75$. Hinweis: Es muss nur eine der beiden Lösungen angegeben werden.	4
i)	Ermitteln der zu unterschreitenden Breite: $1 = -2x^4 + x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = x^2\left(-2x^2 + 1\right);\ x_1 = 0,\ x_{2;3} = \pm\sqrt{0,5}$ Die Breite des Fahrzeugs muss den Wert $3 \cdot 2\sqrt{0,5} \approx 4,24$ m unterschreiten.	4
	Summe der BE	40

Teilaufgabe	BE	Anforderungsbereich I	II	III
a	1	x		
b	4		x	
c	9	x		
d	5		x	
e	5			x
f	3			x
g	5		x	
h	4			x
i	4		x	

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
10	18	12

Aufgabe 2.2: Funktionenschar

1 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x}{2} + 2 + \frac{2}{x-2} = \frac{x^2 + 2x - 4}{2(x-2)}.$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion f an.

Geben Sie die Gleichung der Asymptote des Graphen von f an.

b) Begründen Sie, dass der Graph von f eine Polstelle hat.
Geben Sie die Art der Polstelle an.

c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.

d) In dem Koordinatensystem in der Anlage ist der Graph von f nur teilweise skizziert.
Zeichnen Sie die Asymptote des Graphen von f ein.
Vervollständigen Sie die Skizze des Graphen von f für den Bereich $-5 \le x \le 8$.

e) In dem Koordinatensystem in der Anlage ist die Gerade g mit $g(x) = -x + 6$ eingezeichnet.
Die Gerade g, die senkrechten Geraden $x = 4$ und $x = 6$ sowie der Graph von f schießen eine Fläche ein.
Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

f) Es gibt genau einen Punkt P auf dem Graphen von f, der einen minimalen Abstand zur der Geraden g aus Aufgabenteil e) hat.
Ermitteln Sie die x-Koordinate des Punktes P.

2 Für reelle Zahlen $a > 0$ sind die Funktionen der Schar f_a durch die Gleichung

$f_a(x) = \frac{x}{a} + a + \frac{a}{x-a}$ gegeben. Die Graphen der Schar f_a werden mit G_a bezeichnet.

Die Funktion f ist eine Funktion der Schar f_a, nämlich die Funktion zu dem Wert $a = 2$.

a) Berechnen Sie die möglichen Extremstellen der Funktionen f_a.

Ohne Nachweis dürfen Sie verwenden: $f_a'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{(x-a)^2}$.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der relativen Extrempunkte.

[Kontrollergebnis: $H_a(0\,|\,a-1)$, $T_a(2a\,|\,3+a)$]

c) Untersuchen Sie, ob für eine Funktion der Schar f_a gilt, dass der Abstand zwischen Hoch- und Tiefpunkt des Graphen dieser Funktion genau 5 LE beträgt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 2.2: Funktionenschar (Fortsetzung):

d) Durch die beiden Extrempunkte des Graphen G_a verläuft für jedes $a > 0$ eine Gerade h_a.

Ermitteln Sie, für welchen Wert des Parameters a die Gerade h_a in einem Winkel von 30° zur x-Achse ansteigt.

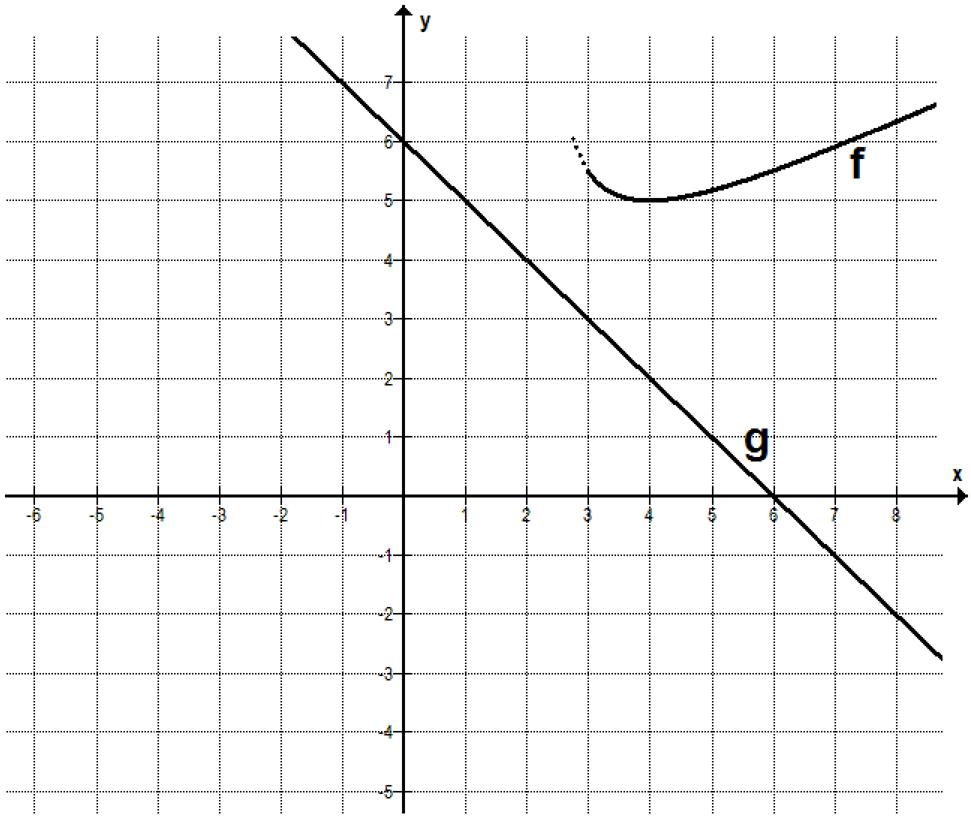
e) Für $a > 1$ hat jeder Graph G_a zwei Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden w, d. h. der Geraden mit $w(x) = x$.

Für den Graph G_3 gilt zusätzlich, dass sich dieser Graph und die Winkelhalbierende in einem der Schnittpunkte im Winkel von 90° schneiden.

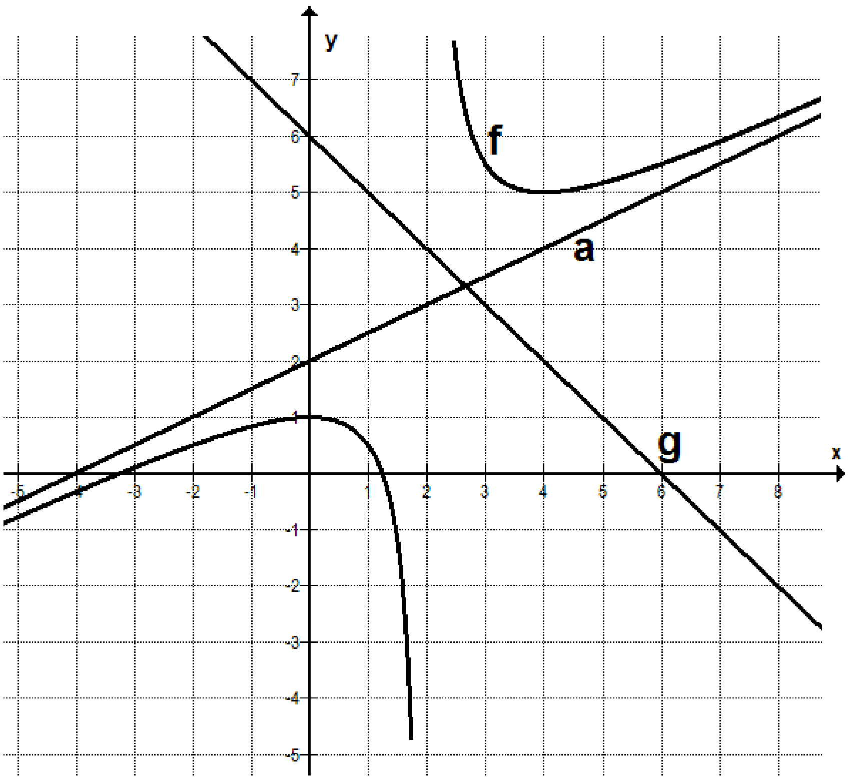
Ermitteln Sie die Koordinaten des anderen Schnittpunkts.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben											
Teilaufgabe	1a)	b)	c)	d)	e)	f)	2a)	b)	c)	d)	e)	Summe
BE	2	3	3	3	5	4	3	4	4	4	5	40

Anlage zur Aufgabe 2.2: Funktionenschar



Erwartungshorizont zu Aufgabe 2.2: Funktionenschar

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
1 a)	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$; Asymptote: $a(x) = \frac{x}{2} + 2$	2
b)	Für $x \to 2$ und $x < 2$ gilt: $f(x) \to -\infty$. Für $x \to 2$ und $x > 2$ gilt: $f(x) \to +\infty$. Damit hat der Graph von f bei $x = 2$ eine Polstelle mit einem Vorzeichenwechsel.	3
c)	Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0 \mid 1)$. Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(-1-\sqrt{5} \mid 0)$, $N_2(-1+\sqrt{5} \mid 0)$. $[N_1(-3{,}24 \mid 0)$, $N_2(1{,}24 \mid 0)]$	3
d)		3
e)	$A = \int_4^6 \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_4^6 \left(\frac{3}{2}x - 4 + \frac{2}{x-2}\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^2 - 4x + 2 \cdot \ln(x-2)\right]_4^6$ $A = 7 + 2 \cdot \ln 2 \approx 8{,}39$ FE	5

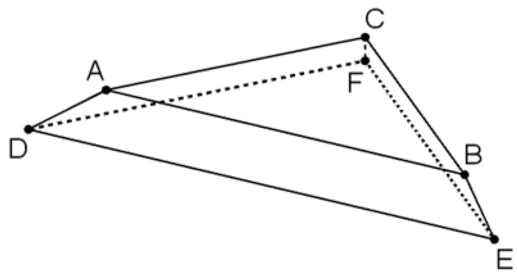
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
f)	Die Steigung der Funktion f am Punkt P muss gleich der Steigung der Geraden g sein. $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{(x-2)^2}$ Aus $f'(x)=-1$ folgt $x_1=2-\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 0{,}85$ und $x_2=2+\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 3{,}15$. Anhand der Skizze in der Anlage lässt sich erkennen, dass der gesuchte Punkt P die x-Koordinate x_2 haben muss.	4
2a)	$f_a'(x)=0$ führt auf $x_1=0$ oder $x_2=2a$.	3
b)	$f_a''(x)=\frac{2a}{(x-a)^3}$ $f_a''(x_E)\neq 0$ führt auf $f_a''(0)=\frac{-2}{a^2}<0$, lokales Maximum; $f_a''(2a)=\frac{2}{a^2}>0$, lokales Minimum $H_a(0\,\vert\,a-1)$ und $T_a\left(2a\,\vert\,3+a\right)$.	4
c)	Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand d: $d^2=\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2$. Damit ist $5^2=\left(0-2a\right)^2+\left(a-1-(3+a)\right)^2 \;\Rightarrow\; a^2=2{,}25$. Diese Gleichung hat unter der Bedingung $a>0$ nur die Lösung $a=+1{,}5$. Für den Graphen $f_{1,5}$ beträgt der Abstand zwischen dem Hoch- und dem Tiefpunkt 5 LE.	4
d)	Für die Steigung der Geraden h_a durch den Hoch- und Tiefpunkt gilt: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a-1-\left(3+a\right)}{0-2a}=\frac{2}{a}$. Es muss gelten: $\tan 30°\approx 0{,}577=\frac{2}{a} \;\Rightarrow\; a\approx 3{,}5$ Für $a\approx 3{,}5$ schneidet die Gerade h_a die x-Achse im Winkel von 30°.	4
e)	Die Bedingungen für die Schnittpunkte mit der Winkelhalbierenden lautet $f_3\left(x\right)=x$. Also: $\frac{x}{3}+3+\frac{3}{x-3}=x \;\Rightarrow\; x_1=1{,}5;\; x_2=6$. Die Bedingung für den Schnittwinkel von 90° lautet $f_3'\left(x\right)=-1$. Also $\frac{1}{3}-\frac{3}{\left(x-3\right)^2}=-1 \;\Rightarrow x_1=1{,}5;\; x_2=4{,}5$. Der Punkt $\left(6\,\vert\,6\right)$ ist also der Schnittpunkt von f_3 und w, an dem der Schnittwinkel nicht 90° beträgt.	5
	Summe der BE	40

Teilaufgabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
1a	2	x		
1b	3		x	
1c	3	x		
1d	3	x		
1e	5		x	
1f	4			x
2a	3	x		
2b	4		x	
2c	4		x	
2d	4			x
2e	5			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
11	16	13

Aufgabe 3.1: Podest

In einem Koordinatensystem wird der abgebildete Körper ABCDEF mit $A(0|10|1)$, $B(10|20|1)$, $C(0|20|1)$, $D(0|7|0)$ und $F(0|20|0)$ betrachtet.
Die beiden Seitenflächen ACFD und BEFC stehen senkrecht zur xy-Ebene.



1 a) A, B und D liegen in der Ebene H.
Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform.
$\left[\text{Kontrollergebnis}: x - y + 3z + 7 = 0\right]$

b) Begründen Sie, dass die Gerade $i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathrm{IR}$ sowohl in der xy-Ebene als auch in der Ebene H liegt.

Der Punkt E liegt auf der Geraden i, wobei der Abstand von E zu F ebenso groß ist wie der Abstand von D zu F.

c) Ermitteln Sie die Koordinaten von E.

d) Begründen Sie ohne zu rechnen, dass die Vierecke ACFD und BEFC den gleichen Flächeninhalt haben.

2 Der Körper ABCDEF stellt modellhaft ein Podest dar, das auf der Bühne eines Theaters steht, das Viereck ADEB die Vorderseite des Podests und der Punkt D deren untere linke Ecke. Die xy-Ebene beschreibt den horizontalen Boden der Bühne. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Zeigen Sie, dass die Deckfläche des Podests rechtwinklig ist, und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

b) Die Position eines Scheinwerfers kann im Modell durch den Punkt $(5|-3|z)$ dargestellt werden. Vom Scheinwerfer ausgehendes Licht trifft an der unteren linken Ecke der Vorderseite des Podests unter einem Winkel der Größe 47° auf den Boden auf.
Ermitteln Sie die Höhe des Scheinwerfers über dem Boden der Bühne.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 3.1: Podest (Fortsetzung)

c) Die Position eines zweiten Scheinwerfers lässt sich im Modell durch den Punkt $P(2\,|\,4\,|\,8)$ beschreiben. Die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ schneidet die Ebene mit der Gleichung $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ im Punkt $Q(-2\,|\,8\,|\,1)$.

Es gilt $\left|\overline{PQ}\right| = 9$.

Ermitteln Sie den Parameter μ, für den der Punkt A auf den Punkt Q abgebildet wird. Treffen Sie auf der Grundlage des Parameters μ und der in 2.c) genannten Informationen eine Aussage über den Abstand des zweiten Scheinwerfers von der Vorderkante der Deckfläche des Podests.
Begründen Sie Ihre Aussage ohne zu rechnen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	1a)	b)	c)	d)	2a)	b)	c)	Summe
BE	4	2	5	3	3	4	4	25

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.1: Podest

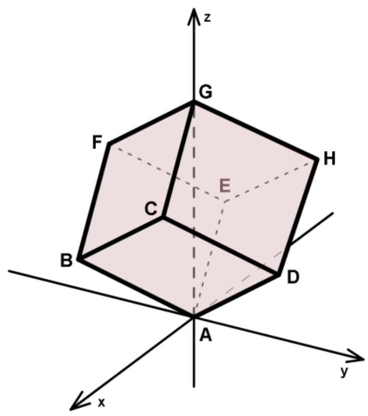
Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
1 a)	Das aus $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\10\\1\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+n\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}$ mit $m,n\in\mathbb{R}$ resultierende Gleichungssystem I $x=10m$ II $y=10+10m-3n$ III $z=1-n$ liefert $y=10+x+3z-3 \Leftrightarrow x-y+3z+7=0$.	4
b)	Für alle Punkte von i gilt $z=0$, d. h. i liegt in der xy-Ebene. Wegen $\lambda-(7+\lambda)+7=0$ liegt i auch in H.	2
c)	Für $\lambda\neq 0$ gilt: $\left\lvert\begin{pmatrix}\lambda\\7+\lambda\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\20\\0\end{pmatrix}\right\rvert=\overline{DF} \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2+(\lambda-13)^2}=13 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda^2-26\lambda+13^2=13^2$ $\Leftrightarrow 2\lambda^2-26\lambda=0 \Leftrightarrow 2\lambda\cdot(\lambda-13)=0 \Leftrightarrow \lambda=13$ Damit: $E(13\,\vert\,20\,\vert\,0)$	5
d)	Grund- und Deckfläche des Körpers sind parallel zur xy-Ebene, die beiden Vierecke stehen senkrecht dazu, sind also Trapeze mit gleicher Höhe. Da zudem die Punkte A, B, D und E in einer Ebene liegen, gilt wegen $\overline{DF}=\overline{EF}$ auch $\overline{AC}=\overline{BC}$.	3
2 a)	$\overrightarrow{CA}\circ\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}=0$ $\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}=\frac{1}{2}\cdot10\cdot10=50$, d. h. der Flächeninhalt beträgt $50\,\text{m}^2$.	3
b)	$\tan 47^\circ=\dfrac{z}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}\right\rvert}=\dfrac{z}{\sqrt{125}} \Leftrightarrow z=\tan 47^\circ\cdot\sqrt{125}$, d. h. die Höhe beträgt etwa $12\,\text{m}$.	4
c)	$\begin{pmatrix}-2\\8\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\mu=-2$ Der Abstand ist größer als $9\,\text{m}$. Begründung: Q ist der Fußpunkt des Lots von P auf der Geraden durch A und B. Da $Q\notin\overline{AB}$, ist der Abstand von P zu $\overline{AB}$ größer als $\lvert\overline{PQ}\rvert$.	4
	Summe der BE	25

Teilaufgabe	BE	Anforderungsbereich		
		I	II	III
1 a	4		x	
b	2	x		
c	5		x	
d	3			x
2 a	3	x		
b	4		x	
c	4			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
5	13	7

Aufgabe 3.2: Würfel

Betrachtet wird der abgebildete Würfel mit $A(0|0|0)$, $B(3|-3|3)$, $G(0|0|9)$ und $H(-3|3|6)$.



a) Berechnen Sie das Volumen des Würfels.

b) Begründen Sie, dass das Viereck ABGH ein Rechteck ist, und zeichnen Sie dieses in die Abbildung ein.

c) Das Viereck ABGH liegt in der Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Parameterform und Koordinatenform.
$[\text{Kontrollergebnis}: x + y = 0]$

d) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Ebene L mit der xz-Ebene einschließt.

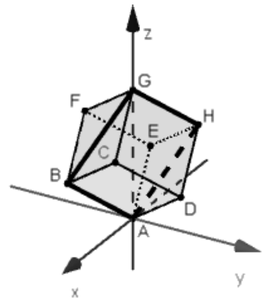
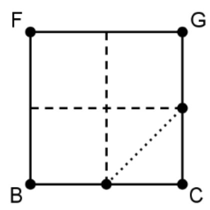
e) Ermitteln Sie die Koordinaten von F.

f) Die Ebene, die durch die Mittelpunkte der Kanten $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{AD}$ und $\overline{DH}$ verläuft, teilt den Würfel in zwei Teilkörper.
Begründen Sie mithilfe einer Skizze, dass das Volumen des kleineren Teilkörpers ein Achtel des Volumens des Würfels ist.

g) Gegeben ist die Schar der Ebenen $z = k$ mit $k \in \mathbb{R}$.
Geben Sie in Abhängigkeit von k die unterschiedlichen Arten der Figuren an, in denen die Ebenen für $0 < k < 9$ den Würfel schneiden.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben								
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	Summe
BE	2	3	5	2	5	5	3	25

Erwartungshorizont zu Aufgabe 3.2: Würfel

Teil-aufgabe	Beschreibung der erwarteten Schülerleistung	BE
a)	$\left\|\overline{AB}\right\|^3 = 81\sqrt{3}$	2
b)	$\overline{AB}$ und $\overline{GH}$ sind als Kanten, $\overline{AH}$ und $\overline{BG}$ als Seitendiagonalen eines Würfels gleich lang. $\overline{BG}$ liegt in der Seitenfläche BFGC und steht damit senkrecht zu $\overline{AB}$. 	3
c)	$L: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}; \; t, s \in \mathbb{R}$ $\overrightarrow{AB} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \wedge \overrightarrow{AG} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor von L. Da A in L liegt, ergibt sich für die gesuchte Gleichung $x + y = 0$.	5
d)	Da L die z-Achse enthält und den Winkel halbiert, den die positive x-Achse und die negative y-Achse einschließen, beträgt die Größe des gesuchten Winkels 45°.	2
e)	Mittelpunkt von $\overline{BG}$: $M(1{,}5 \mid -1{,}5 \mid 6)$ Da $\overline{CF}$ senkrecht zu L steht, gilt $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM} - \frac{1}{2} \cdot \left\|\overrightarrow{BG}\right\| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ -1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix}$. Damit: $F\left(1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \mid -1{,}5 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \mid 6\right)$	5
f)	Der kleinere Teilkörper ist ein gerades Prisma. Die Grundfläche des Prismas ist eine Teilfläche der Seitenfläche BFGC; der Inhalt dieser Teilfläche ist ein Achtel des Inhalts der Seitenfläche BFGC. Die Höhe des Prismas stimmt mit der Kantenlänge des Würfels überein. 	5
g)	Für $0 < k \leq 3$ und $6 \leq k < 9$ ist die jeweilige Schnittfigur ein Dreieck, für $3 < k < 6$ ein Sechseck.	3
	Summe der BE	25

Teilaufgabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
a	2	x		
b	3	x		
c	5		x	
d	2		x	
e	5			x
f	5		x	
g	3			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
5	12	8

Aufgabe 4.1: Blumensamen

Ein Pflanzenhändler erhält in einem Behälter eine große Lieferung von Blumensamen, in der zwei Sorten vermischt sind. Diese besteht aus den Samen einer rot blühenden Blume (kurz: Rotblüher) und den Samen einer blau blühenden Blume (kurz: Blaublüher). Einige Samen keimen nicht, d. h. aus ihnen wächst keine Blume.
Die Samen sind äußerlich nicht voneinander zu unterscheiden.
Der Anteil der Rotblüher an der Samenmischung beträgt 80 %.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samen der Rotblüher keimt, ist 95 %.

a) Ein Samen wird zufällig aus der Lieferung entnommen.
Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der entnommene Samen ein Rotblüher ist und keimen wird, 0,76 beträgt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind genau 7 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden."
B: „Unter 10 zufällig ausgewählten Samen sind mindestens 9 Samen, die Rotblüher sind und keimen werden."

c) Bestimmen Sie, wie viele Samen höchstens aus dem Behälter entnommen werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 99 % mindestens ein keimender Rotblüher dabei ist.

d) Es wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Samen der Samenmischung keimt, 0,9 beträgt.
Die Blaublüher sind eine neu gezüchtete Sorte, von der man bisher noch keine genauen Kenntnisse bzgl. ihrer Keimung hatte.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Blaublüher keimt.

Für den Verkauf verpackt der Händler jeweils 5 Samen der Mischung in eine Tüte.
Betrachtet wird im Folgenden die Zufallsgröße
R: „Anzahl der Rotblühersamen in einer Tüte".

e) Ergänzen Sie in der Tabelle die fehlende Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße R für den Wert $r = 3$.
Erläutern Sie zwei Möglichkeiten für die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit.

r	0	1	2	3	4	5
$P(R = r)$	0,0003	0,0064	0,0512		0,4096	0,3277

f) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsgröße R gilt: $E(R) = 4$.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 4.1: Blumensamen (Fortsetzung)

g) Entscheiden Sie durch Ankreuzen, welche der Aussagen auf Grund des gezeigten Erwartungswertes sachbezogen entweder richtig oder falsch sind.
Begründen Sie Ihre Entscheidung für die Aussage mit der Nummer 1.

Nummer	Aussage	richtig	falsch
1	Kauft man eine Tüte, sind in dieser mindestens 4 Samen der Rotblüher.		
2	Wenn man 100 Tüten kauft, sind unter diesen mit Sicherheit mindestens 4 Tüten, in denen mindestens ein Samen der Rotblüher ist und der Rest sind Blaublüher.		
3	Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tüte höchstens 4 Samen von Rotblühern sind, beträgt mehr als 50 %.		

h) Ein Kunde will von 10 gekeimten Samen 4 für seinen Balkon auswählen. Er möchte, dass darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 70 % mindestens 3 Rotblüher sind. Ermitteln Sie, wie groß hierfür der Anteil der Rotblüher unter den 10 Samen mindestens sein muss.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben									
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	1	4	3	3	4	1	5	4	25

Erwartungshorizont zu Aufgabe 4.1: Blumensamen

<table>
<tr><th>Teil-aufgabe</th><th>Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Ro: Rotblüher, K: Samen keimt
Nach Pfadregel folgt: $P(Ro \cap K) = 0,8 \cdot 0,95 = 0,76$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>X („Anzahl der keimfähigen Rotblüher“) ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0,76$
$P(A) = P(X = 7) = \binom{10}{7} \cdot 0,76^7 \cdot 0,24^3 \approx 0,2429$
$P(B) = \binom{10}{9} \cdot 0,76^9 \cdot 0,24 + 0,76^{10} \approx 0,2673$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>X („Anzahl der keimfähigen Rotblüher“) ist binomialverteilt mit $p = 0,76$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,24^n \leq 0,99$, d.h. $0,01 \leq 0,24^n$
$n \leq 3,2$. D. h. höchstens 3 Samen sind zu entnehmen.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>B: Blaublüher; gesucht: $P_B(K) = x$
$P(K) = 0,9 = P(R \cap K) + P(B \cap K) = 0,76 + 0,2 \cdot x \Rightarrow x = 0,7$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Zufallsgröße R ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0,8$:
$P(R = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 \approx 0,2048$,
oder $P(R = 3) = 1 - 0,0003 - 0,0064 - 0,0512 - 0,4096 - 0,3277 = 0,2048$</td><td>4</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>$E(R) = \mu = 0,8 \cdot 5 = 4$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>richtig</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Kauft man eine Tüte, sind in dieser mindestens 4 Samen der Rotblüher.</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Wenn man 100 Tüten kauft, sind unter diesen mit Sicherheit mindestens 4 Tüten, in denen mindestens ein Samen der Rotblüher ist und der Rest sind Blaublüher.</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Tüte höchstens 4 Samen von Rotblühern sind, beträgt mehr als 50 %.</td><td>x</td><td></td></tr>
</table>
Die Aussage 1 ist falsch, weil die Samen von außen nicht unterscheidbar sind und somit die Auswahl zufällig erfolgt.
Damit kann bspw. auch kein Rotblüher in der Tüte sein.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>h)</td><td>z. B. ergibt Probieren für 7 Rotblüher unter den 10 Samen:
$P(X \geq 3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{2}{3}$.
Für 8 Rotblüher erhält man: $P(X \geq 3) \approx 0,87$.
Es müssen also mindestens 8 Rotblüher unter den 10 Samen sein.</td><td>4</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td>25</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	BE	Anforderungsbereich		
		I	II	III
a	1	x		
b	4	x		
c	3			x
d	3		x	
e	4		x	
f	1	x		
g	5		x	
h	4			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
6	12	7

Aufgabe 4.2: Spam-Mail

Ein Nutzer von E-Mail-Kommunikation stellt fest, dass der Anteil von unerwünschten Werbe-E-Mails (Spam-Mails) an seinen Posteingang über einen längeren Zeitraum konstant 30 % beträgt. Angenommen wird dabei, dass die Spam-Mails zufällig und unabhängig voneinander eingehen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse.
A: „Von fünf eingegangenen E-Mails ist keine eine Spam-Mail."
B: „Von fünf eingegangenen E-Mails ist nur genau die letzte eine Spam-Mail."

b) In einer Woche befinden sich 50 Mails im Posteingang.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Spam-Mails in dieser Woche um mehr als 20 % über dem Erwartungswert liegt.

Die Spam-Mails enthalten Schlüsselwörter, an denen man sie sehr gut erkennt und durch die der Spam-Filter sie aussortiert. In 40 % der Spam-Mails taucht das Schlüsselwort „sale" auf, in den E-Mails, die keine Spam-Mails sind, jedoch nur in 1 % der Fälle.

c) Stellen Sie diesen Sachverhalt in einer Vierfeldertafel dar.

d) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine vom Spam-Filter durch das Wort „sale" aussortierte E-Mail keine Spam-Mail ist.

In 15 % der Spam-Mails ist das Schlüsselwort „season" enthalten und wird ebenfalls mit dem Spam-Filter erkannt.

e) Paul behauptet, dass der Anteil der E-Mails, die durch die Worte „sale" oder „season" als Spam erkannt werden, an allen E-Mails 55 % beträgt.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass diese Behauptung im Allgemeinen falsch ist.

f) Der Anteil der Spam-Mails, die durch die Worte „sale" oder „season" als Spam erkannt werden, beträgt 45 %.
Berechnen Sie den Anteil der Spam-Mails, in denen beide Worte vorkommen.

Nach einem Jahr wird in einer Fachzeitschrift behauptet, dass sich der Anteil der Spam-Mails an den eingehenden E-Mails verändert hat. Jemand will das für den Anteil von ursprünglich 30 % Spam-Mails im E-Mail-Eingang mit einem Signifikanztest auf dem Niveau $\alpha = 0{,}05$ für eine Stichprobe von $n = 50$ zufällig ausgewählten E-Mails untersuchen.

Dafür werden folgende Hypothesen festgelegt.

H_0: Der Anteil der Spam-Mails an den eingegangenen E-Mails beträgt 30 %.

H_1: Der Anteil der Spam-Mails an den eingegangenen E-Mails hat sich verändert.

Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Spam-Mails.

g) Entscheiden Sie, welche Art von Entscheidungsregel geeignet ist und begründen Sie Ihre Entscheidung:
Entscheidungsregel 1: Wenn $X \geq k$ gilt, dann wird H_0 abgelehnt.
Entscheidungsregel 2: Wenn $k_u < X < k_o$ gilt, dann wird H_0 nicht abgelehnt.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Aufgabe 4.2: Spam-Mail (Fortsetzung)

Der Nutzer behauptet nun, dass sich der Anteil der E-Mails, die Spam-Mails sind, in seinem E-Mail-Eingang vergrößert hat.

h) Berechnen Sie unter Annahme der Binomialverteilung, in welchem Bereich die Anzahl der Spam-Mails in einer Stichprobe von $n = 50$ E-Mails sein muss, um die Vermutung des Nutzers auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}05$ zu stützen.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben									
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	Summe
BE	3	3	4	2	2	3	3	5	25

Anlage zur Aufgabe 4.2: Spam-Mail

Summierte Binomialverteilung für n = 50

Dargestellt sind die Werte $P(X \le k)$.

Gerundet auf vier Nachkommastellen, weggelassen ist „0,“,
alle freien Plätze und alle nicht dargestellten Zeilen enthalten 0,0000 bzw. 1,0000.
Wird die Tabelle „von unten“ gelesen (p > 0,5), ist der richtige Wert 1 – (abgelesener Wert)

n	k	p										k	n
		0,05	0,10	$\frac{1}{6}$	0,20	0,25	0,30	$\frac{1}{3}$	0,40	0,45	0,50		
	0	0769	0052	0001								49	
	1	2794	0338	0012	0002							48	
	2	5405	1117	0066	0013	0001						47	
	3	7604	2503	0238	0057	0005						46	
	4	8964	4312	0643	0185	0021	0002					45	
	5	9622	6161	1388	0480	0070	0007	0001				44	
	6	9882	7702	2506	1034	0194	0025	0005				43	
	7	9968	8779	3911	1904	0453	0073	0017	0001			42	
	8	9992	9421	5421	3073	0916	0183	0050	0002			41	
	9	9998	9755	6830	4437	1637	0402	0127	0008	0001		40	
	10		9906	7986	5836	2622	0789	0284	0022	0002		39	
	11		9968	8827	7107	3816	1390	0570	0057	0006		38	
	12		9990	9373	8139	5110	2229	1035	0133	0018	0002	37	
	13		9997	9693	8894	6370	3279	1715	0280	0045	0005	36	
	14		9999	9862	9393	7481	4468	2612	0540	0104	0013	35	
	15			9943	9692	8369	5692	3690	0955	0220	0033	34	
	16			9978	9856	9017	6839	4868	1561	0427	0077	33	
	17			9992	9937	9449	7822	6046	2369	0765	0164	32	
50	18			9997	9975	9713	8594	7126	3356	1273	0325	31	50
	19			9999	9991	9861	9152	8036	4465	1974	0595	30	
	20				9997	9937	9522	8741	5610	2862	1013	29	
	21				9999	9974	9749	9244	6701	3900	1611	28	
	22					9990	9877	9576	7660	5019	2399	27	
	23					9996	9944	9778	8438	6134	3359	26	
	24					9999	9976	9892	9022	7160	4439	25	
	25						9991	9951	9427	8034	5561	24	
	26						9997	9979	9686	8721	6641	23	
	27						9999	9992	9840	9220	7601	22	
	28							9997	9924	9556	8389	21	
	29							9999	9966	9765	8987	20	
	30								9986	9884	9405	19	
	31								9995	9947	9675	18	
	32								9998	9978	9836	17	
	33								9999	9991	9923	16	
	34									9997	9967	15	
	35									9999	9987	14	
	36										9995	13	
	37										9998	12	
n	k	0,95	0,90	$\frac{5}{6}$	0,80	0,75	0,70	$\frac{2}{3}$	0,60	0,55	0,50	k	n
		p											

Erwartungshorizont zu Aufgabe 4.2: Spam-Mail

<table>
<tr><th>Teil-
aufgabe</th><th>Beschreibung der erwarteten Schülerleistung</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$P(A) = 0,7^5 = 0,16807$
$P(B) = 0,7^4 \cdot 0,3 = 0,07203$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>X („Anzahl der Spam-Mails in dieser Woche“) ist binomialverteilt mit
$n = 50$ und $p = 0,3$
$E(X) = 50 \cdot 0,3 = 15$
$15 \cdot 1,2 = 18$
$P(X \geq 19) \approx 0,1406$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c)</td><td><table>
<tr><th></th><th>Spam</th><th>$\overline{\text{Spam}}$</th><th></th></tr>
<tr><td>"sale"</td><td>0,12</td><td>0,007</td><td>0,127</td></tr>
<tr><td>$\overline{\text{"sale"}}$</td><td>0,18</td><td>0,693</td><td>0,873</td></tr>
<tr><td></td><td>0,30</td><td>0,70</td><td>1,000</td></tr>
</table></td><td>4</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>$P(C) = P_{\text{"sale"}}\left(\overline{\text{Spam}}\right) = \dfrac{P\left(\overline{\text{Spam}} \cap \text{"sale"}\right)}{P(\text{"sale"})} = \dfrac{0,007}{0,127} \approx 0,0551$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Behauptung ist nicht richtig, da es nicht ausgeschlossen ist, dass in einer E-Mail beide Schlüsselwörter gleichzeitig vorkommen.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>$P_{\text{Spam}}(\text{"sale" oder "season"})$
$= P_{\text{Spam}}(\text{"sale"}) + P_{\text{Spam}}(\text{"season"}) - P_{\text{Spam}}(\text{"sale"} \cap \text{"season"})$
$P_{\text{Spam}}(\text{"sale"} \cap \text{"season"}) = 0,4 + 0,15 - 0,45 = 0,1$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Diese Untersuchung erfordert einen zweiseitigen Test, da sich der Anteil der Spam-Mail vergrößert oder verkleinert haben kann.
Die Entscheidungsregel muss lauten:
Wenn $k_u < X < k_o$ gilt, dann wird H_0 nicht abgelehnt.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Spam-Mails.
H_0: Der Anteil der Spam-Mail an den eingegangenen E-Mails beträgt 30 %.
H_1: Der Anteil der Spam-Mail an den eingegangenen E-Mails hat sich vergrößert.
Bestimmt werden muss der kleinste Wert k_o mit: $0,05 \geq P(X \geq k_o)$.
Für $k_o = 21$ gilt $P(X \geq k_o) = 1 - P(X < k_o) \approx 0,0478$, für $k_o = 20$ ist der Wert zu groß.
Die Anzahl der Spam-Mails muss in der Stichprobe größer als 20 sein.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Summe der BE</td><td>25</td></tr>
</table>

Teilaufgabe	**BE**	**Anforderungsbereich**		
		I	**II**	**III**
a	3	x		
b	3	x		
c	4		x	
d	2		x	
e	2		x	
f	3		x	
g	3			x
h	5			x

Anzahl der Bewertungseinheiten im		
Anforderungsbereich I	Anforderungsbereich II	Anforderungsbereich III
6	11	8