Formelsammlung Mathematik

http://www.fersch.de

1. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Definition

Eine Menge (Großbuchstaben) besteht aus unterscheidbaren Elementen.

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$

Mengen in aufzählender Form

$\mathbb{A} = \{a; b; c\}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\mathbb{B} = \left\{-2; 0,4; \sqrt{3}\right\}$

Mengen in beschreibender Form

$\mathbb{M} = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft E}\}$

$\mathbb{M}_1 = \{x | x \text{ Menge aller Primzahlen}\}$
$\mathbb{M}_2 = \{x | x \text{ alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind}\}$

$\in$ Element - $\notin$ nicht Element

$\mathbb{M} = \{a; b; c\}$
$b \in \mathbb{M}$
$e \notin \mathbb{M}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$2 \in \mathbb{A}$
$5 \notin \mathbb{A}$

$\subset$ Teilmenge - $\not\subset$ nicht Teilmenge

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{b; c\}$
$\mathbb{C} = \{b; c; f\}$
$\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ Jedes Element von B ist auch Element von A.
$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{A}$ Nicht jedes Element von C ist auch Element von A.

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\{1; 4\} \subset \mathbb{A}$
$\{1; 4; 5\} \not\subset \mathbb{A}$

Gleichheit $A = B$

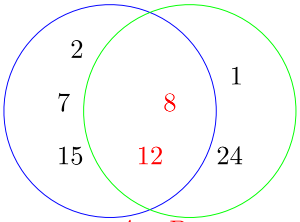
$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ Jedes Element von $\mathbb{A}$ ist auch Element von $\mathbb{B}$.
Jedes Element von $\mathbb{B}$ ist auch Element von $\mathbb{A}$.

$\mathbb{A} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{B} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$

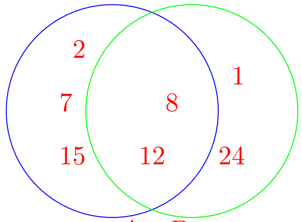
Leere Menge $\{\}$

$\mathbb{A} = \{\} = \emptyset$
Menge A enthält keine Elemente.

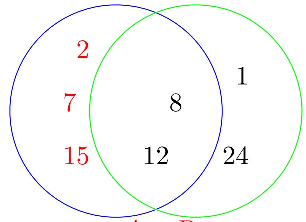
1.1.2 Mengenoperationen



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$ $\qquad$ $\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$

Schnittmenge $\cap$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Elemente die in A und zugleich in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8; 12\}$
$\{4; 5; 23\} \cap \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{4; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Elemente die in A oder B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1; 7; 8; 12; 15; 24\}$
$\{4; 5; 23\} \cup \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{0; 1; 4; 5; 12; 23\}$

Differenz $\setminus$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Elemente die in A, aber nicht in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{2; 7; 15\}$
$\{4; 5; 23\} \setminus \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{23\}$

Produktmenge $\times$

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(x, y) | x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}\}$
$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b\}$
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(c, a); (c, b); (d, a); (d, b); (e, a); (e, b)\}$
Die Menge aller geordneten Paare (x,y).
$x \in \mathbb{A}$ und $y \in \mathbb{B}$

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8\}$
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(2, 1); (2, 8); (7, 1); (7, 8); (8, 1); (8, 8)\}$

1.1.3 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

$3 \in \mathbb{N}$ $\qquad$ $-3 \notin \mathbb{N}$
$0 \notin \mathbb{N}$ $\qquad$ $0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$

Natürliche Zahlen und Null

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$

$3 \in \mathbb{N}_0 \qquad -3 \notin \mathbb{N}_0$
$0 \in \mathbb{N}_0 \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}_0$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$

$3 \in \mathbb{Z} \qquad -3 \in \mathbb{Z}$
$0 \in \mathbb{Z} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ sind
- Bruchzahlen
- endliche Dezimalzahlen
- unendliche periodische Dezimalzahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \qquad 3 \in \mathbb{Q} \qquad -3 \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad 0 \in \mathbb{Q}$
Jede endliche Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
$0,223 = \frac{223}{100} \in \mathbb{Q} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$
Jede unendliche periodische Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
$0,3333... = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \qquad 0,535353.. = 0,\overline{53} = \frac{53}{99} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^+$ = positve rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+$ = positve rationale Zahlen und Null
$\mathbb{Q}^-$ = negative rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_0^-$ = negative rationale Zahlen und Null
$\mathbb{Q} \setminus \{3,4\}$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4
$\mathbb{Q} \setminus [-3;5]$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
$\mathbb{Q} \setminus]-3;5[$ = rationale Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$ sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{I}$
Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{I}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \qquad \sqrt{3} \in \mathbb{I} \qquad \sqrt{4} = 2 \notin \mathbb{I} \qquad 3 \notin \mathbb{I} \qquad -0,3 \notin \mathbb{I}$

Reelle Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind
- rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
- irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

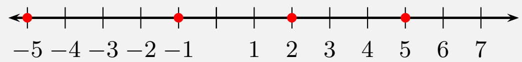
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
$\mathbb{R} = \{\text{jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl}\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{R}$
Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{R}$
$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R} \qquad 3 \in \mathbb{R} \qquad -0,3 \in \mathbb{R}$
$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^+$ = positive reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ = positive reelle Zahlen und Null
$\mathbb{R}^-$ = negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^-$ = negative reelle Zahlen und Null
$\mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4
$\mathbb{R} \setminus [-3;5]$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
$\mathbb{R} \setminus]-3;5[$ = reelle Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Vergleichszeichen

$a = b$	a ist gleich b
$a \neq b$	a ist ungleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a > b$	a ist größer als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b

$3 + 4 = 7$ $3 + 4 \neq 8$



$-5 < -1$ $-1 > -5$ $2 > -1$ $2 < 5$
$5 \leqq 5$ $7 \geqq 5$

1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primzahlen:
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,$
$47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107.....$

Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...
2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.
5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.
9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

$5|45$ 5 ist Teiler von 45
$3|123$ 3 ist Teiler von 123
Quersumme von 123: $1 + 2 + 3 = 6$
$3|6 \Rightarrow 3|123$

Vielfachmenge V(a)

Alle Vielfachen einer natürlichen Zahl a.

$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48..\}$
$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84..\}$
$V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45..\}$

Teilermenge T(a)

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a.

$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$
$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$
$T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Größter gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Methode 1: Aus den Teilermengen von a und b den größten Teiler ablesen.
Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

$ggT(12;18) = 6$
Aus den Teilermengen den größten Teiler ablesen:
T(12)={1;2;3;4;6;12} T(18)={1;2;3;6;9;18}
Gemeinsame Primfaktoren von 12 und 18:

12	2	2	3	
18	2		3	3
ggT(12;18)	2		3	

$ggT(12;18) = 2 \cdot 3 = 6$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.
Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

$kgV(12;18) = 36$
Aus den Vielfachmengen das kleinste Vielfache ablesen:
V(12)={12;24;36;48;60;72.. } V(18)={18;36;54;72;90..}
Primfaktoren von 12 und zusätzlichen Primfaktoren von 18:

12	2	2	3	
18	2		3	3
kgV(12;18)	2	2	3	3

$kgV(12;18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Interaktive Inhalte:
$ggT(a,b)$ $kgV(a,b)$ $ggT(a,b,c)$ $kgV(a,b,c)$

1.1.5 Grundrechnungen

Addition

a	+	b	=	c
1.Summand	+	2.Summand	=	Summe

$3 + 2 = 5$
$2x + 3x = 5x$
$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$
$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$
$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$

Subtraktion

a	-	b	=	c
Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz

$3 - 2 = 1$
$3x - 2x = x$
$2x^2 - 3x^2 = -x^2$
$5x^2y - 7x^2y = -2x^2y$
$3e^x - 2e^x = e^x$

Multiplikation

a	·	b	=	c
1.Faktor	·	2.Faktor	=	Produkt

$3 \cdot 2 = 6$
$2x \cdot 3x = 6x^2$
$2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4$
$5x^2y \cdot 7x^2y = 35x^4y$
$2xy \cdot 3xy \cdot 4z \cdot 5z = 120x^2y^2z^2$

Division

a	:	b	=	c
Dividend	:	Divisor	=	Quotient

$\frac{a}{b} = c \qquad \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$

$12 : 3 = 4$
$\frac{12}{3} = 4$

1.1.6 Grundrechenregeln

Kommutativgesetz

$a \cdot b = b \cdot a$

$a + b = b + a$

$3 + 2 = 2 + 3 = 5$
$2x + 3x = 3x + 2x = 5x$
$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$
$2x \cdot 3x = 3x \cdot 2x = 6x^2$

Assoziativgesetz

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$4 + (3 + 2) = (4 + 3) + 2 = 9$
$4x + (3x + 2x) = (4x + 3x) + 2x = 9x$
$4 \cdot (3 \cdot 2) = (4 \cdot 3) \cdot 2 = 24$
$4x \cdot (3x \cdot 2x) = (4x \cdot 3x) \cdot 2x = 24x^3$

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 21$
$3 \cdot (2x + 5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 = 6x + 15$
$3x \cdot (2x + 5) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5 = 6x^2 + 15x$

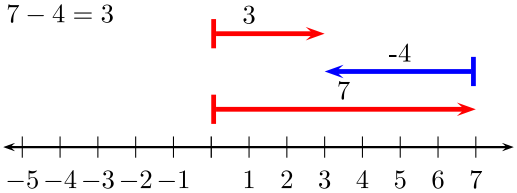
Reihenfolge der Rechenarten

- Klammern vor
- Potenzierung vor
- Punktrechnung (Mulitiplikation und Division) vor
- Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
- von links nach rechts

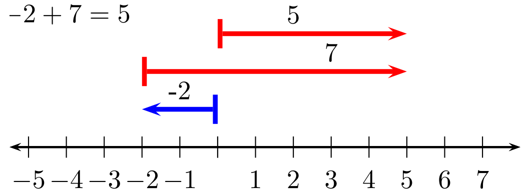
$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 2^3)^2$	
Innerhalb der Klammer Potenzierung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 8)^2$
Innerhalb der Klammer Punktrechnung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$
Innerhalb der Klammer Strichrechnung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$
Potenzierung:	$100 - 40 - 5 \cdot 2^2$
Punktrechung:	$100 - 40 - 5 \cdot 4$
von links nach rechts:	$100 - 40 - 20$
Ergebnis:	$60 - 20 = 40$

1.1.7 Vorzeichenregel

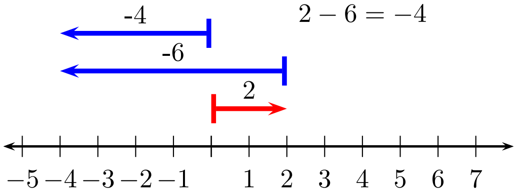
$7 - 4 = 3$



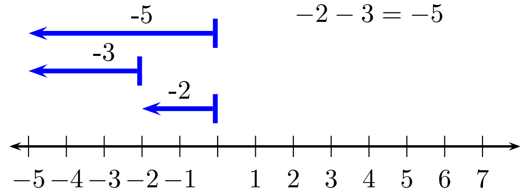
$-2 + 7 = 5$



$2 - 6 = -4$



$-2 - 3 = -5$



Vorzeichen und Klammern

$$+(+a) = +a$$
$$+(-a) = -a$$
$$-(+a) = -a$$
$$-(-a) = +a$$

$+(+2) = +2$
$-(-2) = +2$
$+(-2) = -2$
$-(+2) = -2$

Multiplikation

$$+a \cdot (+b) = +c$$
$$-a \cdot (-b) = +c$$
$$+a \cdot (-b) = -c$$
$$-a \cdot (+b) = -c$$

$+3 \cdot (+2) = +6$
$-3 \cdot (-2) = +6$
$+3 \cdot (-2) = -6$
$-3 \cdot (+2) = -6$

Division

$$\frac{+a}{+b} = +c$$
$$\frac{-a}{-b} = +c$$
$$\frac{+a}{-b} = -c$$
$$\frac{-a}{+b} = -c$$

$\frac{+6}{+3} = +2$
$\frac{-6}{-3} = +2$
$\frac{+6}{-3} = -2$
$\frac{-6}{+3} = -2$

Addition und Subtraktion

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.
Bei verschiedenen Vorzeichen werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größerem Betrag.

$10 + 4 = 14$
$-10 - 4 = -(10 + 4) = -14$
$10 - 4 = 6$
$-10 + 6 = -(10 - 6) = -4$
$3x + 4x = 7x$
$-3x - 4x = -(3x + 4x) = -7x$
$3x - 4x = -(4x - 3x) = -x$
$-3x + 4x = 4x - 3x = x$

Betrag einer Zahl

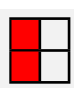
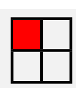
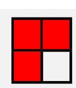
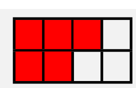
$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$|-3| = 3$
$|3| = 3$

1.1.8 Brüche

Bruch

Dividend : Divisor = Quotient
$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N}$=Wert des Bruchs

 $= \frac{1}{2}$  $= \frac{1}{4}$  $= \frac{3}{4}$  $= \frac{5}{8}$

Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch:Zähler größer als Nenner
- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche:Nenner ist verschieden
- Kehrwert:Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche:Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

Echter Bruch: $\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{1}{3}$

Unechter Bruch: $\frac{20}{4}; \frac{15}{7}; \frac{8}{3}$

Gemischte Zahl: $2\frac{2}{4}; 6\frac{5}{7}; 7\frac{8}{3}$

Stammbrüche: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

Gleichnamige Brüche: $\frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{8}{4}$

Ungleichnamige Brüche: $\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{8}{3}$

Kehrwert: $\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{2}; \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{5}$

Scheinbrüche: $\frac{4}{2} = 2; \frac{28}{7} = 4$

Erweitern von Brüchen

Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

Kürzen von Brüchen

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

- Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler;Nenner) teilen

$ggT(a, b) = c$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

- Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 2}{18 : 2} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$$

$\mathrm{ggT}(18; 12) = 6$

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2 + 4}{3} = \frac{6}{3}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5 - 3}{7} = \frac{2}{7}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

- Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$$

- Hauptnenner: kgV(b,d)=c

Erweiterungsfaktoren: $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{d}$

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$
Hauptnenner: $3\cdot 4=12$

Erweiterungsfaktoren: 4 **und** 3

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$$
$$\frac{3}{12}+\frac{5}{18}$$
Hauptnenner: kgV$(12,18)=36$

Erweiterungsfaktoren: $\frac{36}{12}=3$ $\quad\frac{36}{18}=2$

$$\frac{3}{12}+\frac{5}{18}=\frac{3\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{9+10}{36}=\frac{19}{36}=\frac{19}{36}$$

Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}$$

Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

Bruch durch Bruch

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Bruch durch Zahl

$$\frac{\frac{a}{b}}{e}=\frac{a}{b}:e=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{e}=\frac{a}{b\cdot e}$$

Zahl durch Bruch

$$\frac{e}{\frac{c}{d}}=e:\frac{c}{d}=\frac{e}{1}\cdot\frac{d}{c}=\frac{e\cdot d}{c}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}$$
$$4:\frac{5}{6}=4\cdot\frac{6}{5}=\frac{4\cdot 6}{5}=\frac{24}{5}$$
$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$$
$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}==\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}$$

Interaktive Inhalte:

Kürzen $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ $a\frac{b}{c}-d\frac{e}{f}$

1.1.9 Dezimalbruch

Stellenwerttafel

Bruch	M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt	ht		Dezimalbruch
$\frac{1}{10}$							0	,	1						$0,1$
$\frac{1}{100}$							0	,	0	1					$0,01$
$\frac{23}{100}$							0	,	2	3					$0,23$
$\frac{456}{1000}$							0	,	4	5	6				$0,456$
$12\frac{3}{10000}$						1	2	,	0	0	0	3			$12,0003$
$567\frac{30}{10000}$					5	6	7	,	0	0	3	0			$567,003$

Z	Zehner	10^1	10	
H	Hunderter	10^2	100	
T	Tausender	10^3	1000	
ZT	Zehntausender	10^4	10000	
HT	Hunderttausender	10^5	100000	
M	Million	10^6	1000000	

E	Einer	10^0	1	
z	Zehntel	10^{-1}	$0,1$	$\frac{1}{10}$
h	Hundertstel	10^{-2}	$0,01$	$\frac{1}{100}$
t	Tausendstel	10^{-3}	$0,001$	$\frac{1}{1000}$
zt	Zehntausendstel	10^{-4}	$0,0001$	$\frac{1}{10000}$
ht	Hunderttausendstel	10^{-5}	$0,00001$	$\frac{1}{100000}$

Bruch - Dezimalbruch

- Erweitern des Bruchs auf Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw.
- Werte in die Stellenwerttafel einsetzen.
- Schriftliches Dividieren

$\frac{1}{10} = 0,1 \qquad \frac{1}{100} = 0,01$

$\frac{1}{1000} = 0,001 \qquad \frac{1}{2}\frac{5}{10} = 0,5 \qquad \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16$

$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375 \qquad \frac{12,5}{100} = 0,125$

$\frac{201}{1000} = 0,201 \qquad \frac{125}{10000} = 0,0125$

$\frac{100}{100} = 1$

$\frac{2}{3} = 2:3 = 0,666... = 0,\overline{6}$

Dezimalbruch - Bruch

- Endlicher Dezimalburch:
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner die entsprechende Stufenzahl(10,100,1000)
- Periodischer Dezimalbruch:
Periode beginnt direkt nach den Komma
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner den entsprechenden Bruch mit 9 (9,99,999)

$0,201 = \frac{201}{1000} \qquad 0,0001 = \frac{1}{10000}$

$0,\overline{1} = \frac{1}{9} \qquad 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$

$0,\overline{12} = \frac{12}{99} \qquad 0,\overline{255} = \frac{255}{999}$

Multiplizieren oder Dividieren mit Stufenzahl

- Multipliziern einer Dezimalzahl mit:
10 - Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach rechts verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben
......
- Dividieren einer Dezimallzahl durch:
10 - Komma um 1 Stelle nach links verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach links verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach links verschieben
......

$345,677 \cdot 10 = 3456,77 \qquad 345,677 \cdot 100 = 34567,7$

$345,677 \cdot 1000 = 345677,0 \qquad 345,677 \cdot 10000 = 3456770,0$

$345,677 : 10 = 34,5677 \qquad 345,677 : 100 = 3,45677$

$345,677 : 1000 = 0,345677 \qquad 345,677 : 10000 = 0,0345677$

Runden von Dezimalbrüchen

Ziffer der zu rundenten Stelle bestimmen.

• Ist die nachfolgende Ziffer 0,1,2,3,4, dann wird abgerundet. Die gerundete Stelle bleibt unverändert

• Ist die nachfolgende Ziffer 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet. Die gerundete Stelle wird um eins erhöht.

• Wenn nach dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffer weggelassen.

• Wenn vor dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern durch Null ersetzt.

$712,654$ runden auf Zehntel (1 Nachkommastelle)
Ziffer der Zehntelstelle: 6
Nachfolgende Ziffer: 5 $\Rightarrow$ aufrunden $6+1$
Gerundete Zahl: $712,7$
$712,654$ runden auf Hunderter
Ziffer der Hunderterstelle: 7
Nachfolgende Ziffer: 1 $\Rightarrow$ abrunden 700
Gerundete Zahl: 700
$712,9996$ runden auf Tausendstel (3 Nachkommastellen)
Ziffer der Tausendstelstelle: 9
Nachfolgende Ziffer: 6 $\Rightarrow$ aufrunden $712,999+0,001$
Gerundete Zahl: $713,000$

Wissenschaftliche Zahlendarstellung

• Definition

$x = m \cdot 10^n$

m - Mantisse 1<m<10

n - Exponent

10 - Basis

$x_1 = m_1 \cdot 10^{n_1} \quad x_2 = m_2 \cdot 10^{n_2}$

• Multiplikation

$x_1 \cdot x_2 = m_1 \cdot 10^{n_1} \cdot m_2 \cdot 10^{n_2} = m_1 \cdot m_2 10^{n_1+n_2}$

• Division

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_1 \cdot 10^{n_1}}{m_2 \cdot 10^{n_2}} = \frac{m_1}{m_2} 10^{n_1-n_2}$

• Addition

Gleiche Exponenten:$n = n_1 = n_2$

$x_1 + x_2 = m_1 \cdot 10^n + m_2 \cdot 10^n = (m_1 + m_2)10^n$

• Subtraktion

$x_1 - x_2 = m_1 \cdot 10^n - m_2 \cdot 10^n = (m_1 - m_2)10^n$

$345 = 3,45 \cdot 10^2$
Komma um 2 Stellen nach links verschieben
$0,00345 = 3,45 \cdot 10^{-3}$
Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben
$345 \cdot 10^7 = 3,45 \cdot 10^2 \cdot 10^7 = 3,45 \cdot 10^9$
Komma um 2 Stellen nach links verschieben
$0,00345 \cdot 10^{-4} = 3,45 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} = 3,45 \cdot 10^{-7}$
Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben

$x_1 = 5,2 \cdot 10^3 \quad x_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$
$x_1 \cdot x_2 = 6,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} = 6,2 \cdot 2,5 \cdot 10^{3-2} = 15,5 \cdot 10^1 = 1,55 \cdot 10^2$
$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6,2 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{6,2}{2,5} 10^{3-(-2)} = 2,48 \cdot 10^5$
Gleiche Exponenten:$2,5 \cdot 10^{-2} = 0,000025 \cdot 10^3$
$x_1 + x_2 = 6,2 \cdot 10^3 + 0,000025 \cdot 10^3 = (6,2 + 0,000025)10^3 = 6,200025 \cdot 10^3$
$x_1 - x_2 = 6,2 \cdot 10^3 - 0,000025 \cdot 10^3 = (6,2 - 0,000025)10^3 = 6,199975 \cdot 10^3$

1.1.10 Schriftliches Rechnen

Schriftliche Addition

1. Summand + 2.Summand = Summe
Zahlen stellenweise untereinander schreiben.
Komma unter Komma - Einer unter Einer usw.

 1.Summand (obere Zahl)
+ 2.Summand (untere Zahl)
____________Übertragszeile
 Summe (Ergebniszeile)

Von rechts beginnend die einzelne Ziffen addieren.
Obere Ziffer + untere Ziffer oder
Obere Ziffer + untere Ziffer + Übertrag
- Ist das Ergenis kleiner als 10, wird das Ergebnis in die Ergebniszeile geschrieben.
- Ist das Ergebnis größer als 9, wird die Einerziffern in die Ergebniszeile geschrieben. Die Zehnerziffer schreibt man in die nächste Spalte der Übertragszeile.

$89,9 + 5,92 =$

$$\begin{array}{rr|l} & 89,90 & 0+2=2 \\ + & 5,92 & \text{Ergebnis:2} \\ & & \text{Übertrag:0} \\ \hline & 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 89,90 & 9+9=18 \\ + & 5,92 & \text{Ergebnis:8} \\ & 1 & \text{Übertrag:1} \\ \hline & 82 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 89,90 & 9+5+1=15 \\ + & 5,92 & \text{Ergebnis:5} \\ & 1\ 1 & \text{Übertrag:1} \\ \hline & 5,82 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 89,90 & 8+0+1=9 \\ + & 5,92 & \text{Ergebnis:9} \\ & 1\ 1 & \text{Übertrag:0} \\ \hline & 95,82 & \end{array}$$

$89,90 + 5,92 = 95,82$

Schriftliche Subtraktion

Minuend - Subtrahend = Differenz
Zahlen stellenweise untereinander schreiben.
Komma unter Komma - Einer unter Einer usw.

 Minuend (obere Zahl)
- Subtrahend (untere Zahl)
____________Übertragszeile
 Differenz (Ergebniszeile)

Von rechts beginnend die einzelne Ziffern subtrahieren.
Obere Ziffer - untere Ziffer oder
Obere Ziffer - (untere Ziffer + Übertrag)
Ist das Ergebnis größer gleich als Null, wird das Ergebnis in die Ergebniszeile geschrieben.
Ist das Ergebnis kleiner als Null, fügt man bei der oberen Ziffer eine Zehnerstelle hinzu, so dass das Ergebnis größer gleich Null wird. Die Einerziffer kommt in die Ergebniszeile. Die Zehnerziffer schreibt man in die nächste Spalte der Übertragszeile.

$123,48 - 89,47 =$

$$\begin{array}{rr|l} & 123,48 & 8-7=1 \\ - & 89,47 & \text{Ergebnis:1} \\ & & \text{Übertrag:0} \\ \hline & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 123,48 & 4-4=0 \\ - & 89,47 & \text{Ergebnis:0} \\ & & \text{Übertrag:0} \\ \hline & 01 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 123,48 & 13-9=4 \\ - & 89,47 & \text{Ergebnis:4} \\ & 1 & \text{Übertrag:1} \\ \hline & 4,01 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 123,48 & 12-(8+1)=3 \\ - & 89,47 & \text{Ergebnis:3} \\ & 11 & \text{Übertrag:1} \\ \hline & 34,01 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} & 123,48 & 1-(0+1)=0 \\ - & 89,47 & \text{Ergebnis:0} \\ & 11 & \text{Übertrag:0} \\ \hline & 034,01 & \end{array}$$

$123,48 - 89,47 = 34,01$

Schriftliche Multiplikation

1. Faktor · 2. Faktor= Produkt
linke Zahl · rechte Zahl = Ergebnis
Die einzelnen Ziffern der rechten Zahl mit der linken Zahl multiplizieren.
Das Ergebnis unter die Ziffer der rechten Zahl schreiben.
Die Ergebnisse addieren.
Die Nachkommastellen der beiden Faktoren addieren und beim Ergebnis das Komma setzen.

Schriftliche Multiplikation
$34,61 \cdot 9,3 =$

$$\begin{array}{r} \underline{3461 \cdot 93} \\ 31149 \\ 10383 \\ \hline 321873 \end{array}$$

Nachkommastellen:$2 + 1 = 3$
$34,61 \cdot 9,3 = 321,873$

Schriftliche Division

Dividend : Divisor = Quotient
linke Zahl : rechte Zahl = Ergebnis
Enthält der Divisor(rechlte Zahl) ein Komma, wird das Komma beider Zahlen um soviel Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist.
Versuch die erste Ziffer (die ersten beiden Ziffer usw.) der linken Zahl durch die rechte Zahl zu teilen, bis man bei der Teilung eine ganze Zahl erhält.
Das Ergebnis der Teilung mit der rechten Zahl multiplizieren und von den verwendeten Ziffern subtrahieren.
Die nächste Ziffer der linken Zahl an das Ergebnis anfügen und wieder versuchen zu teilen.
Ein Komma im Ergebnis entsteht,
- wenn man eine Ziffer, die nach dem Komma steht anfügt.
- wenn die linken Ziffern einer ganzen Zahl aufgebraucht sind und man eine Null anfügt.

$15 : 2 =$

$$\begin{array}{rl} & 15 : 2 = 7,5 \\ & 15 \\ - & \underline{14} \\ & 10 \\ - & \underline{10} \\ & 0 \end{array}$$

$15,45 : 2,456 =$

$$\begin{array}{rl} & 15450 : 2456 = 6,2 \\ & 15450 \\ - & \underline{14736} \\ & 7140 \\ - & \underline{4912} \\ & 2228 \end{array}$$

$6,2$ Rest 2228

Interaktive Inhalte:
Addition Subtraktion Multiplikation Division

1.1.11 Bruchteile - Prozent - Promille

Bruchteile

- Bruchteil (relativer Anteil) $= \frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Ganze}}$
- absoluter Anteil = Bruchteil · Ganze
- Ganze $= \frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Bruchteil}}$

Welcher Bruchteil sind 200 € von 800 €?
$\frac{200}{800} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Gesucht: absoluter Anteil
$\frac{1}{4}$ von 800 €?
$\frac{1}{4} \cdot 800$ € $= 200$ €

Gesucht: Ganze
$\frac{1}{4}$ sind 200 €?
$\frac{200\text{ €}}{\frac{1}{4}} = 800$ €

Prozent

- $p\% = \frac{p}{100}$ p Prozent = p Hundertstel
- Prozentsatz= Bruchteil $\cdot 100$ %
- Bruchteil= $\frac{\text{Prozentsatz}}{100\%}$

p - Prozentzahl
p% - Prozentsatz

$p\% = 0,01 = \frac{1}{100} = 1\%$ $p = 1$
$p\% = 0,34 = \frac{34}{100} = 34\%$ $p = 34$
$p\% = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$ $p = 12,5$
$p\% = 1,25 = \frac{125}{100} = 125\%$ $p = 125$

Promille

- p ‰= $\frac{p}{1000}$ p Promille = p Tausendstel
- Promillesatz= Bruchteil $\cdot 1000$ ‰
- Bruchteil= $\frac{\text{Promillesatz}}{1000‰}$

p - Promillezahl
p‰ - Promillesatz

$p‰ = 0,001 = \frac{1}{1000} = 1$ ‰ $p = 1$
$p‰ = 0,034 = \frac{34}{1000} = 34$ ‰ $p = 34$
$p‰ = 0,125 = \frac{125}{1000} = 125$ ‰ $p = 125$
$p‰ = 1,25 = \frac{1250}{1000} = 1250$ ‰ $p = 1250$

1.1.12 Prozentrechnung

Prozentrechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ $P_w = p\% \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $G = \frac{P_w}{p\%}$
- $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ $p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert
p - Prozentzahl
p% - Prozentsatz
P_w - Prozentwert

Wie viel sind 25% von 800 €?
$P_w = \frac{25 \cdot 800\ €}{100} = 200\ €$
$p\% = 25\% = \frac{25}{100} = 0,25$
$P_w = 0,25 \cdot 800\ € = 200\ €$

25% sind 200 €.Grundwert?
$G = \frac{200 \cdot 100}{25} = 800\ €$ $G = \frac{200}{0,25} = 800\ €$

Wie viel Prozent sind 200 € von 800 €?
$p = \frac{200 \cdot 100}{800} = 25$ $p\% = 25\%$
$p\% = \frac{200}{800} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$

Interaktive Inhalte:
$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$

1.1.13 Promillerechnung

Promillerechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{1000}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ $\quad P_w = p‰ \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ $\quad G = \frac{P_w}{p‰}$
- $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ $\quad p‰ = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert
p - Promillezahl
p‰ - Promillesatz
P_w - Promillewert

Wie viel sind 25‰ von 800 €?
$P_w = \frac{25 \cdot 800\ €}{1000} = 20\ €$
$p‰ = \frac{25}{1000} = 0,025$
$P_w = 0,025 \cdot 800\ € = 20\ €$

25‰ sind 20 €.Grundwert?
$G = \frac{20 \cdot 1000}{25} = 800\ €$ $\quad G = \frac{200}{0,025} = 800\ €$

Wie viel Promille sind 20 € von 800 €?

$p = \frac{20 \cdot 1000}{800} = 25$ $\quad p‰ = 25‰$

$p‰ = \frac{20}{800} = 0,025 = \frac{25}{1000} = 25‰$

Interaktive Inhalte:
$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$

1.1.14 Prozentuale Ab- und Zunahme

Prozentuale Ab- und Zunahme

- Endwert= Änderungsfaktor · Anfangswert

$E = q \cdot A$ $\quad q = \frac{E}{A}$ $\quad A = \frac{E}{q}$

- Prozentuale Zunahme $q > 1$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\quad p = (q-1) \cdot 100$

Endwert=Anfangswert+Veränderung

- Prozentuale Abnahme $0 < q < 1$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $\quad p = (1-q) \cdot 100$

Endwert=Anfangswert-Veränderung

A - Anfangswert
E - Endwert
q - Änderungsfaktor
p - Prozentuale Zu- bzw. Abnahme

Eine Artikel kostet 200 €.
Der Preis wird um 10% erhöht.
$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$ $\quad E = 1.1 \cdot 200\ € = 220\ €$
Der Preis wird um 10% gesenkt.
$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9$ $\quad E = 0.9 \cdot 200\ € = 180\ €$

Eine Artikel kostet nach Preiserhöhung 220 €.
Der Preis wurde um 10% erhöht.
$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$ $\quad A = \frac{220}{1.1} = 200\ €$
Eine Artikel kostet nach der Preissenkung 180 €.
Der Preis wurde um 10% gesenkt.
$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9$ $\quad A = \frac{180}{0.9} = 200\ €$

Eine Artikel kostet 200 €.
Nach einer Preiserhöhung kostet er 220 €.
$q = \frac{220}{200} = 1.1$ $\quad p = (1.1-1) \cdot 100 = 10\%$
Nach einer Preissenkung kostet er 180 €.
$q = \frac{180}{200} = 0.9$ $\quad p = (1-0.9) \cdot 100 = 10\%$

Interaktive Inhalte:
$E = q \cdot A$ $A = \frac{E}{q}$ $p = \frac{E}{A}$

1.1.15 Potenzen

Definition

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Faktoren}}$

a = Basis n = Exponent

$a^0 = 1 \quad a^1 = a$

Basis: 10

$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$e^0 = 1 \quad e^1 = e$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
$4^0 = 1$
$x^0 = 1$
$4^1 = 4$
$x^1 = x$

Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$

$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$
$e^3 \cdot e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$

Potenzen dividieren

gleiche Basis - Exponenten subtrahieren

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$

$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$
$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
$\frac{e^5}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = e^8$

Potenz ausklammern

gleicher Exponent - Exponent ausklammern

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$
$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$

Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$

$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
$\left(x^2\right)^3 = x^6$
$\left(x^2 \cdot 4\right)^2 = x^4 \cdot 4^2$
$(e^x)^2 = e^{2x}$

Potenzen mit negativem Exponenten

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x^{-3} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^3 y^2}$

Potenz - Wurzel

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a > 0$
$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$
$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

Potenz mit rationalem Exponenten

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a > 0$
$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$
$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Potenzen mit rationalem (negativ) Exponenten

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad a > 0$
$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$
$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$

$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.1.16 Wurzeln

Wurzel - Potenz

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
n - Wurzelexponent a - Radikand
Quadratwurzel: $\sqrt{a}$
Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}$

Wurzeln multiplizieren

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

Wurzeln dividieren

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Wurzel in der Wurzel

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen

- Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$$

- Erweitern mit der 3. Binomischen Formel

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{30}$$

$$\frac{3}{5\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(x+2)}$$

Erweitern zur 3. Binomischen Formel

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.1.17 Logarithmen

Definition

$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$

b = Basis a = Numerus

Basis: 10

$log_{10}x = lgx$

$10^{lgx} = x$

$lg10^x = x$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$log_e x = \ln x$

$e^{\ln x} = x$

$\ln e^x = x$

$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
$log_e 3 = \ln 3$
$e^{\ln 3} = 3$
$\ln e^3 = 3$
$log_{10} 2 = lg2$
$10^{lg3} = 3$
$lg10^3 = 3$

Logarithmen addieren

$\log_c a + \log_c b = \log_c(a \cdot b)$

$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$

$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$log_2 4 + log_2 8 = log_2(4 \cdot 8) = log_2 32$
$log_3 x + log_3 y = log_3(x \cdot y)$

Logarithmen subtrahieren

$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$

$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \frac{5}{7}$
$\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$

Logarithmus von der Potenz

$log_c a^n = n \log_c a$
$log_a a^n = n \log_a a = n$
$lg 10^n = n$
$ln e^n = n$

$log_3 5^2 = 2 \log_3 5$

Basisumrechnung von Logarithmen

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,68$$

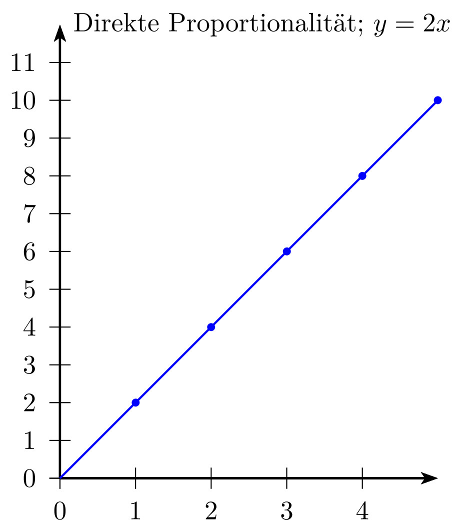
Logarithmus von der Wurzel

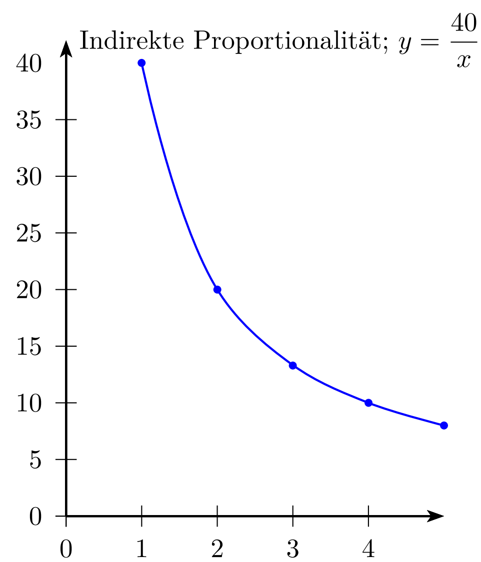
$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

$\log_4 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log_4 3$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.1.18 Proportionalität





Direkte Proportionalität

y ist ein vielfaches von x

$y = m \cdot x$

Proportionalitätsfaktor: m

y ist direkt proportional zu x: $y \sim x$

Direkte Proportionalität = quotientengleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4}..$

Funktionsgleichungen:

$y = m \cdot x \qquad x = \frac{y}{m} \qquad m = \frac{y}{x}$

Graph: Urspungsgerade

Ein Tafel Schokolade kostet 2 €.
Zwei Tafeln Schokolade kosten 4 €.
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln
m= Preis einer Tafel

$y = 2 \cdot x$

Wieviel kosten 5 Tafeln ?

$y = 2 \cdot 5 = 10$

Wieviel Tafeln bekommt man für 12 € ?

$x = \frac{12}{2} = 6$

Tabelle:

Anzahl	1	2	3	4	5
Preis	2	4	6	8	10

Direkte Proportionalität = quotientengleich

$m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$

Funktionsgleichung:$y = 2 \cdot x$

Indirekte Proportionalität

y mal x ist konstant

$k = y \cdot x$

y ist indirekt proportional zu x: $y \sim \frac{1}{x}$

Indirekte Proportionalität = produktgleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$k = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = y_3 \cdot x_3 = y_4 \cdot x_4..$

Funktionsgleichungen:

$y = \frac{k}{x} \qquad x = \frac{k}{y} \qquad k = y \cdot x$

Graph: Hyperbel

10 Arbeiter benötigen 4 Tage
Wie lange brauchen 20 Arbeiter?
x= Arbeiter
y= Tage
k= Anzahl der Tage bei einem Arbeiter

$k = y \cdot x$

$k = 10 \cdot 4 = 40$

$y = \frac{40}{20} = 2$

Tabelle:

Arbeiter	1	2	3	4	5
Tage	40	20	$13\frac{1}{3}$	10	8

Indirekte Proportionalität = produktgleich

$k = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 20 = 3 \cdot 13\frac{1}{3} = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40$

Funktionsgleichung:$y = \frac{40}{x}$

Dreisatz - Verhältnisgleichung

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$

$y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$

$y_1 = \frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} \qquad y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$

$x_1 = \frac{x_2 \cdot y_1}{y_2} \qquad x_2 = \frac{x_1 \cdot y_2}{y_1}$

7 Tafeln Schokolade kosten 14 €.

Wieviel kosten 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

$\frac{14}{7} = \frac{y_2}{5}$

$y_2 = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10$

1.1.19 Zahlensysteme

0_{10}	0_2	0_{16}	10_{10}	1010_2	A_{16}	20_{10}	10100_2	14_{16}	30_{10}	11110_2	$1E_{16}$	40_{10}	101000_2	28_{16}
1_{10}	1_2	1_{16}	11_{10}	1011_2	B_{16}	21_{10}	10101_2	15_{16}	31_{10}	11111_2	$1F_{16}$	41_{10}	101001_2	29_{16}
2_{10}	10_2	2_{16}	12_{10}	1100_2	C_{16}	22_{10}	10110_2	16_{16}	32_{10}	100000_2	20_{16}	42_{10}	101010_2	$2A_{16}$
3_{10}	11_2	3_{16}	13_{10}	1101_2	D_{16}	23_{10}	10111_2	17_{16}	33_{10}	100001_2	21_{16}	43_{10}	101011_2	$2B_{16}$
4_{10}	100_2	4_{16}	14_{10}	1110_2	E_{16}	24_{10}	11000_2	18_{16}	34_{10}	100010_2	22_{16}	44_{10}	101100_2	$2C_{16}$
5_{10}	101_2	5_{16}	15_{10}	1111_2	F_{16}	25_{10}	11001_2	19_{16}	35_{10}	100011_2	23_{16}	45_{10}	101101_2	$2D_{16}$
6_{10}	110_2	6_{16}	16_{10}	10000_2	10_{16}	26_{10}	11010_2	$1A_{16}$	36_{10}	100100_2	24_{16}	46_{10}	101110_2	$2E_{16}$
7_{10}	111_2	7_{16}	17_{10}	10001_2	11_{16}	27_{10}	11011_2	$1B_{16}$	37_{10}	100101_2	25_{16}	47_{10}	101111_2	$2F_{16}$
8_{10}	1000_2	8_{16}	18_{10}	10010_2	12_{16}	28_{10}	11100_2	$1C_{16}$	38_{10}	100110_2	26_{16}	48_{10}	110000_2	30_{16}
9_{10}	1001_2	9_{16}	19_{10}	10011_2	13_{16}	29_{10}	11101_2	$1D_{16}$	39_{10}	100111_2	27_{16}	49_{10}	110001_2	31_{16}

Zahl mit Basis B in Dezimalzahl

- Definition

$Z_B = \sum_{i=0}^{n} Z_i B^i = Z_n B^n + ... + Z_1 B^1 + Z_0 B^0$

Basis: B Ziffern:$Z_n, ..., Z_1, Z_0$

$Basis:$	..	B^3	B^2	B^1	B^0
$Ziffern:$	..	Z_3	Z_2	Z_1	Z_0

Ziffern:$0; 1; 2, 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A = 10; B{=}11; C = 12;$
$D = 13; E = 14; F = 15$

- Dezimalsystem

Basis: 10 Ziffern:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$Z_{10} = \sum_{i=0}^{n} Z_i 10^i = Z_n 10^n + ... + Z_1 10^1 + Z_0 10^0$

- Dualsystem (Binärsystem)

Basis: 2 Ziffern:0,1

$Z_2 = \sum_{i=0}^{n} Z_i 2^i = Z_n 2^n + ... + Z_1 2^1 + Z_0 2^0$

- Hexadezimalsystem

Basis: 16 Ziffern:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F

$Z_{16} = \sum_{i=0}^{n} z_i 16^i = Z_n 16^n + ... + Z_1 16^1 + Z_0 16^0$

$427 = 427_{10} =$

10^2	10^1	10^0
4	2	7

$4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 =$
$4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$

$110101011_2 =$

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	1	0	1	0	1	1

$1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 +$
$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 +$
$0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 427_{10}$

$1AB_{16} =$

16^2	16^1	16^0
1	$A = 10$	$B = 11$

$1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 =$
$1 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 11 \cdot 1 = 427_{10} = 427$

Dezimalzahl in Zahl mit Basis B

- Dezimalzahl durch die neue Basis teilen
- Ergebnis ist ein ganzzahliger Anteil und der Rest
- ganzzahligen Anteil wieder teilen
- usw.
- bis der ganzzahlige Anteil gleich Null ist
- die Ziffern der Reste von unten nach oben abschreiben

$427 = 427_{10}$
$427 : 2 = 213$ Rest:1
$213 : 2 = 106$ Rest:1
$106 : 2 = 53$ Rest:0
$53 : 2 = 26$ Rest:1
$26 : 2 = 13$ Rest:0
$13 : 2 = 6$ Rest:1
$6 : 2 = 3$ Rest:0
$3 : 2 = 1$ Rest:1
$1 : 2 = 0$ Rest:1
$427_{10} = 110101011_2$

$427 = 427_{10}$
$427 : 16 = 26$ Rest:$11 = B$
$26 : 16 = 1$ Rest:$10 = A$
$1 : 16 = 0$ Rest:1
$427_{10} = 1AB_{16}$

Interaktive Inhalte:
Zahlensysteme

1.1.20 Folgen und Reihen

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Arithmetische Folge	3	7	11	15	19	23	...
Geometrische Folge	2	6	18	54	152	486	...

Arithmetische Folge

$a_1; a_2; a_3; a_4; ....a_n \quad n \in \mathbb{N}$

$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; \ldots; a_1 + (n-1)d; \ldots$

Differenz: $d = a_{n+1} - a_n$

explizite Darstellung: $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + d$

Summe:

$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k) = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$

$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k) = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d)$

$3; 7; 11; 15; 19; 23; 27..$

$a_1 = 3 \qquad a_2 = 7 \qquad a_3 = 11 \qquad a_4 = 15 \qquad ...$

Differenz: $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3....$

$d = 7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 4$

explizite Darstellung: $a_n = 3 + (n-1)\cdot 4$

$a_5 = 3 + (5-1)4 = 19$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + 4$

$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3 + 4 = 7 \qquad a_3 = 7 + 4 = 11 \qquad ...$

Summe:

$s_4 = \sum_{k=1}^{4}(a_k) = 3 + 7 + 11 + 15 = 36$

$s_4 = \frac{4(3+15)}{2} = 36$

Geometrische Folge

$a_1; a_2; a_3; a_4; ....a_n \quad n \in \mathbb{N}$

$a_1; a_1q; a_1q^2; \ldots; a_1q^{n-1};$

Quotient: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

explizite Darstellung:$a_n = a_1q^{n-1}$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Summe:

$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k) = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$

$2; 6; 18; 54; 162; 486..$

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 6 \qquad a_3 = 18 \qquad a_4 = 54 \qquad ....$

Quotient: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}....$

$q = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3$

explizite Darstellung: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_4 = 2 \cdot 3^{4-1} = 54$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n \cdot 3$

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_3 = 6 \cdot 3 = 18 \qquad ...$

Summe:

$s_4 = \sum_{k=1}^{4}(a_k) = 2 + 6 + 18 + 54 = 80$

$s_4 = 2\frac{3^4-1}{3-1} = 80$

Fibonacci-Folge

$a_1 = 1; a_2 = 1$

Addition der beiden vorherigen Zahlen.

rekursive Darstellung:$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$

explizite Darstellung:

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; ..$

rekursive Darstellung:

$a_1 = 1; a_2 = 1$

$a_3 = 1 + 1 = 2 \quad a_4 = 1 + 2 = 3$

$a_5 = 2 + 3 = 5 \quad a_6 = 3 + 5 = 8$

..

explizite Darstellung:

$a_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right) = 8$

Spezielle Folgen und Reihen

•Natürliche Zahlen: $1; 2; 3; 4; ..n$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

Geraden Zahlen: $a_n = 2; 4; 6; 8; ..2n$

$s_n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

•Ungeraden Zahlen: $1; 3; 5; 7; ..2n-1$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Addiert man die ersten n ungeraden Zahlen, so ist die Summe n^2 .

• Quadratzahlen: $1; 4; 9; 16; ..n^2$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

• Kubikzahlen: $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ..n^3$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n}{2}(n+1))^2 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$

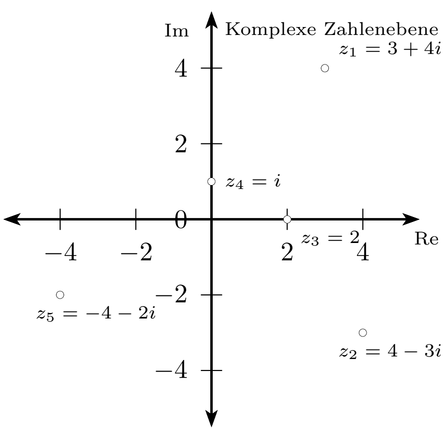
Die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen. $s_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100}{2}(100+1) = 5050$

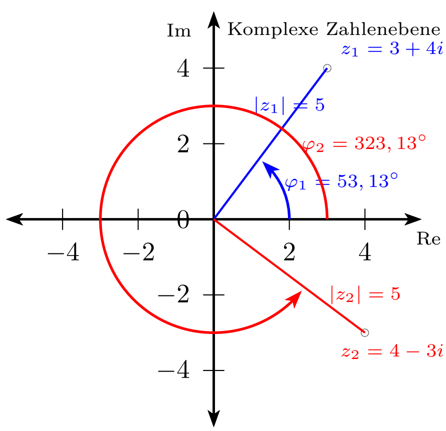
Die Summe der ersten 6 ungeraden Zahlen. $s_6 = 1+3+5+7+9+11 = 36$

$s_6 = \sum_{i=1}^{6}(2i-1) = 6^2 = 36$

Addiert man die ersten 6 ungeraden Zahlen, so ist die Summe $6^2 = 36$.

1.1.21 Komplexe Zahlen





Imaginäre Einheit

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind eine Erweiterung der reelen Zahlen $\mathbb{R}$, um die imaginäre Einheit i (j). Die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ sind eine echte Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$i^2 = -1$

$i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i$

$n \in \mathbb{Z}$

$i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i$

Lösung von Gleichungen in $\mathbb{C}$

$x^2 + 1 = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{\}$

$x^2 = -1 \quad x \in \mathbb{C} \quad \mathbb{L} = \{i\},$

$x = \sqrt{-1}$

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$x = \sqrt{-4}$

$x = \sqrt{4}\sqrt{-1}$

$x = 2i$

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

$x_1 = \frac{-2+4i}{2} \qquad x_2 = \frac{-2-4i}{2}$

$x_1 = -1+2i \qquad x_2 = -1-2i$

Kartesische Form der komplexen Zahl

$z = x + iy$

$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z$

x Realteil

y Imaginärteil

$z_1 = 3 + 4i \quad x = Re(z_1) = 3 \quad y = Im(z_1) = 4$
$z_2 = 4 - 3i \quad x = Re(z_2) = 4 \quad y = Im(z_2) = -3$
$z_3 = 2 \quad x = Re(z_3) = 2 \quad y = Im(z_3) = 0$
$z_4 = i \quad x = Re(z_4) = 0 \quad y = Im(z_4) = 1$
$z_5 = -4 - 2i \quad x = Re(z_5) = -4 \quad y = Im(z_5) = -2$

Polarformen der komplexen Zahl

•Exponentialform

$z = re^{i\varphi}$

•Trigonometrische Form

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

r Betrag von z

φ Argument,Winkel,Phase $\qquad DEG/RAD$

•Exponentialform
Gradmaß (DEG):$z_1 = 5e^{i53,13°}$
Bogenmaß (RAD):$z_1 = 5e^{i0,93}$
•Trigonometrische Form
Gradmaß (DEG):$z_2 = 5(\cos 53,13° + i\sin 53,13°)$
Bogenmaß (RAD):$z_2 = 5(\cos 0,93 + i\sin 0,93)$

Konjugiert komplexe Zahl z^*

$z = x + iy \qquad z^* = \bar{z} = x - iy$

$z = re^{i\varphi} \qquad z^* = re^{-i\varphi}$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad z^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$z_1 = 3 + 4i \quad z_1^* = 3 - 4i$
$z_1 = 5e^{i53,13°} \quad z_1^* = 5e^{-i53,13°}$
$z_1 = 5(\cos 53,13° + i\sin 53,13°)$
$z_1^* = 5(\cos 53,13° - i\sin 53,13°)$

Rechnungen in kartesischer Form

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$

•Addition

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

•Subtraktion

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

•Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$

•Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

•Multiplikation mit konjugiert Komplexen

$z_1{z_1}^* = (x_1 + iy_1)\,(x_1 - iy_1)$

$z_1{z_1}^* = x_1^2 + y_1^2$

$zz^* = |z|^2$

$z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = 4 + 5i$
•Addition
$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)\,i =$
$6 + 8i$
Subtraktion
$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = (2 - 4) + i\,(3 - 5)$
$= -2 - 2i$
Multiplikation
$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)\,(4 + 5i) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + (2 \cdot 5 + 4 \cdot 3)\,i$
$= -7 + 22i$
Division
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 + 3i)\,(4 - 5i)}{(4 + 5i)\,(4 - 5i)} =$$
$$\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{4^2 + 5^2} + \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 5}{4^2 + 5^2}i = \frac{23}{41} - \frac{2}{41}i$$

Multiplikation mit konjugiert Komplexen
$z_1{z_1}^* = (2 + 3i)\,(2 - 3i)$
$z_1{z_1}^* = 2^2 + 3^2$
$zz^* = 13$

Rechnungen in Polarform

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

•Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

•Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Potenz

$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$

$z_1 = 5e^{i53,13^\circ} \quad z_2 = 5e^{i323,13^\circ}$

•Multiplikation

Beträge multiplizieren und Argumente addieren

$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 5e^{i\left(53,13^\circ+323,13^\circ\right)} = 25e^{i376,26^\circ} = 25e^{i16,26^\circ}$

•Division

Beträge dividieren und Argumente subtrahieren

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i53,13^\circ}}{5e^{i323,13^\circ}} =$

$= e^{i\left(53,13^\circ-323,13^\circ\right)} = e^{-i270^\circ} = e^{i90^\circ}$

Kartesische Form in Polarform

$z = x + iy \quad \text{in} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi' = \arctan(\left|\frac{y}{x}\right|)$

	y	x
I. Quadrant	+	+
II. Quadrant	+	-
III. Quadrant	-	-
IV. Quadrant	-	+

	DEG	RAD
I. Quadrant	$\varphi = \varphi'$	$\varphi = \varphi'$
II. Quadrant	$\varphi = 180^\circ - \varphi'$	$\varphi = \pi - \varphi'$
III. Quadrant	$\varphi = 180^\circ + \varphi'$	$\varphi = \pi + \varphi'$
IV. Quadrant	$\varphi = 360^\circ - \varphi'$	$\varphi = 2\pi - \varphi'$

$z_1 = 3 + 4i$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\varphi' = \arctan\left(\left|\frac{4}{3}\right|\right)$

$\varphi' = 53,13^\circ$

$y = 4 > 0 \wedge x = 3 > 0 \Rightarrow$ I. Quadrant

$\varphi = 53,13^\circ$

$z_1 = 5e^{i53,13^\circ}$

$z_1 = 5(\cos 53,13^\circ + i\sin 53,13^\circ)$

$z_2 = 4 - 3i$

$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\varphi = \arctan\left(\left|\frac{-3}{4}\right|\right)$

$\varphi' = 36,87^\circ$

Je nach Vorzeichen von x und y den Quadranten wählen.

$y = -3 < 0 \wedge x = 4 > 0 \Rightarrow$ IV. Quadrant

Den Winkel in den Quadranten umrechnen.

$\varphi = 360^\circ - 36,87^\circ = 323,13^\circ$

$z_2 = 5e^{i323,13^\circ}$

Polarform in kartesische Form

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \quad \text{in} \quad z = x + iy$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$z_1 = 5e^{i53,13^\circ}$

$x = 5\cos 53,13^\circ = 3$

$y = 5\sin 53,13^\circ = 4$

$z_1 = 3 + 4i$

Interaktive Inhalte:

Rechungen:$z = x + iy$ | Rechungen:$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ | Polarform in Kartesische Form | Kartesische Form in Polarform

1.2 Terme

1.2.1 Grundlagen

Definition

Terme sind sinnvolle Verknüpfungen (+,-,·,/) von Koeffizienten (Zahlen) und Variablen (Buchstaben: x,y,z,a..).
Eine Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl.
Physikalische und geometrische Formeln sind Terme.
Terme können mit Hilfe des Kommutativgesetzes, Assoziativgesetzes und Distributivgesetzes umgeformt werden.

- konstanter Term: 2
- linearer Term: $5x$
- quadratischer Term: $6x^2$
- weitere Terme:

$3 \cdot x - 4$ $\quad 2yx - 4y$
$3a - 2b$ $\quad 3zx - 2xu$
$x^2 - 3x^2 - x^2$ $\quad yx^2 - 3zx^2 - ux^2$
$5x^2y - 7x^2$ $\quad 5e^2y - 2e^3$
$V = l \cdot b \cdot h$ $\quad \rho = \frac{m}{V}$

- keine Terme:

$4 + *4 \qquad /4, -@$

Schreibweisen

• Man darf das Malzeichen vor der Variable und vor der Klammer weglassen.
$a \cdot x = ax$
$a \cdot (x + b) = a(x + b)$
• Den Faktor 1 vor einer Variable kann man weglassen.
$1 \cdot x = 1x = x$
• Zahlen schreibt man vor die Variable
$x \cdot a = ax$

$3 \cdot x = 3x$
$2 \cdot y \cdot 3 = 6y$
$a \cdot x = ax$
$3 \cdot (x - 2) = 3(x - 2)$
$x \cdot y \cdot 5 = 5xy$

Termwert - Termname

Jedem Term kann man einen Namen zuweisen. In Klammern kann man die Variablen des Terms angeben.
Name(Variable 1, Variable 2...)=Term
Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Zahlen, berechnet man den Wert des Terms.

Umfang des Rechtecks:
$U(a; b) = 2a + 2b$ oder $U = 2a + 2b$
Name des Terms: U Variable: a,b Term:2a+2b
Berechnen der Termwerts:$a = 5 \quad b = 6$
$U(5; 6) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$ oder $U = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$
$U(5; 6) = 22$ oder $U = 22$
Termwert: 22
Linearer Term (Funktion)
$f(x) = 2x + 3$ oder $f : y = 2x + 3$
Name des Terms: f Variable: x Term: 2x+3
Berechnen der Termwerts:$x = 5$
$f(5) = 2 \cdot 5 + 3$ oder $y = 2 \cdot 5 + 3$
$f(5) = 13$ oder $y = 13$
Termwert:13

1.2.2 Umformung von Termen

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zwei Terme sind gleichartig, wenn sie aus den gleichen Variablen (Klammerausdrücke) mit den jeweiligen gleichen Exponenten bestehen. Gleichartige Terme kann man durch addieren (subtrahieren) der Koeffizienten zusammenfassen:

Gleichartige Terme $2x$ und $3x$
$2x + 3x = 5x$
Gleichartige Terme $-2x$ und $-3x$
Gleichartige Terme $6y$ und $-5y$
$-2x + 6y - 5y - 3x = -5x + y$
$x^3 + 4x^3 = 5x^3$
$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$
$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$
$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$
$3e^x - 2e^x = e^x$
$(x^2 - 5x - 27) - (x + 3) =$
$x^2 - 5x - 27 - x - 3 = x^2 - 6x - 30$
Nicht gleichartige Terme kann man nicht zusammenfassen.
$2x + 3y + 3 =$
$2x^2 + 3x + 2 =$
$x^3 + 5x^4 =$
$3e^{2x} - 2e^x =$

Multiplizieren und Dividieren von Termen

Die Zahlen multiplizieren (dividieren) und gleiche Variablen zusammenfassen (Potenzgesetze).

$2x \cdot 3x = 6x^2$
$2x \cdot 3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$6x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$\frac{9x}{3x} = 3$

$\frac{12x}{3x^2} = \frac{4}{x}$

Addieren und Subtrahieren von Summentermen

- Vorzeichen vor Summenterm

$+(a + b) = a + b \qquad +(a - b) = a - b$
$-(a + b) = -a - b \qquad -(a - b) = -a + b$

- Summenterm und Summenterm

$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$
$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$
$(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$

$(2x + 1) + (x + 3) = 2x + 1 + x + 3 = 3x + 4$
$(2x + 1) + (x - 3) = 2x + 1 + x - 3 = 3x - 2$
$(2x + 1) - (x + 3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$
$-(2x + 1) + (x + 3) = -2x - 1 + x + 3 = -x + 2$

Multiplizieren von Summentermen - Ausmultiplizieren

Ein Produkt in eine Summe(Differenz) umwandeln.

Jedes Glied mit jedem multiplizieren.

- Faktor mal Summenterm

$c \cdot (a+b) = (a+b) \cdot c = ac + bc$

- Summenterm mal Summenterm

$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a+b) \cdot (c+d+e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$

- 3 Faktoren

$c \cdot (a+b) \cdot (d+e) = (ac+bc) \cdot (d+e) =$

$acd + ace + bcd + bce$

$(a+b) \cdot (c+d) \cdot (e+f) = (ac+ad+bc+bd) \cdot (e+f) =$

$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$

$(2x+1) \cdot (x-3) =$
$2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$
$2x^2 + (-6x) + x + (-3) = 2x^2 - 5x - 3$
$(x^2 - 5x - 27) \cdot (x+3) =$
$x^2 \cdot x + x^2 \cdot 3 + (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot 3 + (-27) \cdot x + (-27) \cdot 3 =$
$x^3 + 3x^2 + (-5x^2) + (-15x) + (-27x) + (-81) =$
$x^3 - 2x^2 - 42x - 81$
$(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) =$
$(x^2 - x - 6) \cdot (x-5) =$
$x^3 - 6x^2 - x + 30$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.2.3 Binomische Formel

1. Binomische Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$

$(-a-b)^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$

$(x+5)^2 = x^2 + 10 \cdot x + 25$
$(x+9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(-x-9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x + 5)^2 = 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x + 5)^2 = 36 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 25$
$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z + y)^2 = x^2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

2. Binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$

$(-a+b)^2 = (-1)^2(a-b)^2 = (a-b)^2$

$(x-5)^2 = x^2 - 10 \cdot x + 25$
$(x-9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(-x+9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x - 5)^2 = 4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x - 5)^2 = 36 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 25$
$(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z - y)^2 = x^2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

3. Binomische Formel

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$

$(x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 25$
$(x+9) \cdot (x-9) = x^2 - 81$
$(3 \cdot x + 5) \cdot (3 \cdot x - 5) = 9 \cdot x^2 - 25$
$(7 \cdot x + 9) \cdot (7 \cdot x - 9) = 49 \cdot x^2 - 81$
$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$

Binomische Formel in der 3. Potenz

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1x+2)^3 = 1^3x^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(2x + (-3))^3 =$
$2^3x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3$
$(2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Binomische Formel in der 4. Potenz

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(1x+2)^4 =$
$1^4x^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$
$(x+2)^3 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$(-2x+(-3))^4 =$
$(-2)^4 x^4 + 4 \cdot (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 +$
$4 \cdot (-2) \cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4$
$(-2x-3)^3 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Binomische Formel mit höheren Potenzen

$(a+b)^n = k_o a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + k_n a^0 b^n$

Die Summe der Exponenten ist n.

n+0=n n-1+1=n n-2+2=n ...

Koeffizienten(k_0, k_1..) übers Pascal'sche Dreieck

$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

..

oder über den binomischen Satz:

$(a+b)^n =$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n über k

$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$

$n=2 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$n=3 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 3 \quad k_2 = 3 \quad k_2 = 1$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$n=4 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 4 \quad k_2 = 6 \quad k_3 = 4 \quad k_4 = 1$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Interaktive Inhalte:
$(a+b)^2$ | $(a-b)^2$ | $(a+b) \cdot (a-b)$ | $(ax+b)^3$ | $(ax+b)^4$

1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern

Eine Summe(Differenz) in ein Produkt umwandeln.

- Ausklammern eines Faktors

$ac + bc = c \cdot (a+b)$

- Doppeltes Ausklammern

$ac + ad + bc + bd = a \cdot (c+d) + b(c+d) =$
$(a+b) \cdot (c+d)$

- Binomische Formeln

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$2x^2 + 6x = 2x(x+3)$
Binomische Formeln
$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$
$x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$
$4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$
$36 \cdot x^2 - 60x + 25 = (6x-5)^2$
$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

1.2.5 Quadratische Ergänzung

Maximalen oder minimalen Termwert bestimmen.

$T(x) = ax^2 + bx + c$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$

$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

oder

$T(x) = ax^2 + bx + c$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$

$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a}$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$a < 0$

Maximaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

$a > 0$

Minimaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

$y = x^2 - 6x + 2$
$y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 3^2 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 9 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 7$
Minimaler Termwert $= -7$ für x $= 3$
$y = 2x^2 + 8x + 2$
$y = 2(x^2 + 4x + 1)$
$y = 2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1)$
$y = 2[(x + 2)^2 - 2^2 + 1]$
$y = 2[(x + 2)^2 - 4 + 1]$
$y = 2[(x + 2)^2 - 3]$
$y = 2(x + 2)^2 - 6$
Minimaler Termwert $= -6$ für x $= -2$
$y = -4x^2 + 8x + 4$
$y = -4(x^2 - 2x) + 4$
$y = -4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4$
$y = -4[(x - 1)^2 - 1^2] + 4$
$y = -4[(x - 1)^2 - 1] + 4$
$y = -4(x - 1)^2 + 4 + 4$
$y = -4(x - 1)^2 + 8$
Maximaler Termwert $= 8$ für x $= 1$

1.2.6 Bruchterme

Definition und Definitionsbereich

Bei einem Bruchterm ist im Nenner eine Variable.

$\frac{Z(x)}{N(x)}$

Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Nullstellen des Nenners bestimmen: $N(x) = 0$

Nullstellen aus dem Definitionsbereich ausschließen:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2 ....\}$

$\frac{2}{x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{2}{x-3} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\frac{2x+3}{x(x-3)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

$\frac{3}{x^2-9} \qquad x^2 - 9 = 0 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Erweitern von Bruchtermen

Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren.

$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$

$\frac{x+3}{x-4} = \frac{(x+3) \cdot 2x}{(x-4) \cdot 2x} = \frac{2x^2+6x}{2x^2-8x}$

Kürzen von Bruchtermen

Zähler und Nenner faktorisieren - gleiche Faktoren kürzen.

$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$

$\frac{12x^2+4}{4x^2-2x} = \frac{4x(3x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2(3x+1)}{2x-1}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Zähler addieren bzw. subtrahieren.

$$\frac{a(x)}{c(x)}+\frac{b(x)}{c(x)}=\frac{a(x)+b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{c(x)}-\frac{b(x)}{c(x)}=\frac{a(x)-b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{2}{3x}+\frac{4}{3x}=\frac{2+4}{3x}=\frac{6}{3x}=\frac{2}{x}$$

$$\frac{5x}{7x-2}-\frac{3}{7x-2}=\frac{5x-3}{7x-2}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen.

$$\frac{a(x)}{b(x)}+\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)}+\frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)+c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)}-\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)}-\frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}=\frac{a(x)-b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{2}{5x}+\frac{3}{x+4}=\frac{2\cdot(x+4)}{5x(x+4)}+\frac{3\cdot 5x}{5x(x+4)}=\frac{2\cdot(x+4)+3\cdot 5x}{5x(x+4)}$$

$$=\frac{2x+8+15x}{5x(x+4)}=\frac{17x+8}{5x(x+4)}$$

Multiplikation von Bruchtermen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.

$$\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)\cdot c(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{3x}{x+4}\cdot\frac{5}{6x}=\frac{3x\cdot 5}{(x+4)\cdot 6x}=\frac{15x}{6x\cdot(x+4)}$$

Division von Bruchtermen

Mit dem Kehrwert des Bruchterms multiplizieren.

Bruchterm durch Bruchterm:

$$\frac{a(x)}{b(x)}:\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

Bruch durch Term

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{e(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}:e(x)=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{1}{e(x)}=\frac{a(x)}{b(x)\cdot e(x)}$$

Term durch Bruchterm:

$$\frac{e(x)}{\frac{c(x)}{d(x)}}=e(x):\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{e(x)}{1}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{e(x)\cdot d(x)}{c(x)}$$

Doppelbruch:

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{\frac{c(x)}{d(x)}}=\frac{a(x)}{b(x)}:\frac{c(x)}{d(x)}=\frac{a(x)}{b(x)}\cdot\frac{d(x)}{c(x)}=\frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

$$\frac{3}{4x}:\frac{5}{6x}=\frac{3}{4x}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5}=\frac{18x}{20x}=\frac{9}{10}$$

$$4x:\frac{5}{6x}=4x\cdot\frac{6x}{5}=\frac{4x\cdot 6x}{5}=\frac{24x^2}{5}$$

$$\frac{3}{4x}:5x=\frac{3}{4x}\cdot\frac{1}{5x}=\frac{3}{4x\cdot 5x}=\frac{3}{20x^2}$$

$$\frac{\frac{3}{4x}}{\frac{5}{6x}}=\frac{3}{4x}:\frac{5}{6x}==\frac{3}{4x}\cdot\frac{6x}{5}=\frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5}=\frac{18x}{20x}=\frac{9}{10}$$

1.2.7 Polynomdivision

Die Polynomdivision funktioniert ähnlinch wie die schriftliche Division.

• Voraussetzung: Zählergrad ≧ Nennergrad

• höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen

• Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

• höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

usw.

• Wiederholen bis Zählergrad < Nennergrad

$$\frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$$

• höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$\frac{3x^3}{x}=3x^2$

$(3x^3 \quad -10x^2 \quad +7x \quad -12 \quad):(x-3)=3x^2$

• Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

$(x-3)3x^2=3x^3-9x^2$

$$\begin{array}{llll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 \quad):(x-3)=3x^2 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12
\end{array}$$

• höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$\frac{-x^2}{x}=-x$

usw...

$$\begin{array}{lllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &):(x-3)=3x^2-x+4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

•Polynomdivision mit Rest

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & -5x & -27 &):(x+3)=x-8+\frac{-3}{x+3} \\
-(x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & -8x & -27 & \\
 & -(-8x & -24) & \\
\hline
 & & -3 &
\end{array}$$

•Polynomdivision mit fehlenden Potenzen beim Zähler

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & & & +8 &):(x-2)=x^2+2x+4 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & & +8 & \\
 & -(2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & 4x & +8 & \\
 & & -(4x & -8) & \\
\hline
 & & & 16 &
\end{array}$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.3 Gleichungen

1.3.1 Grundlagen

Definition

Termwert der linken Seite $T_1(x)$ ist gleich dem Termwert der rechten Seite $T_2(x)$.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

$T_1(x) = 2 \cdot (x+3) \qquad T_2(x) = 5x$
$T_1(x) = T_2(x)$
$2 \cdot (x+3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

Grundmenge $\mathbb{G}$ - Definitionsmenge $\mathbb{D}$ - Lösungsmenge $\mathbb{L}$

- Die Grundmenge $\mathbb{G}$ ist die Zahlenmenge, die man für die Variable einsetzen möchte.
- Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist die Zahlenmenge, die man für die Variable einsetzen kann. Aus der Grundmenge werden jene Elemente ausgeschlossen, für die die Gleichung nicht definiert ist.

Bei Gleichungen mit
- Brüchen, muss der Nenner ungleich Null sein.
- Wurzeln, muss der Radikand größer gleich Null sein.
- Logarithmen, muss der Numerus größer als Null sein.

- Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ sind die Zahlen, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergeben und in der Definitionsmenge enthalten sind.
- Gibt es keine Lösung der Gleichung oder ist die Lösung nicht in der Definitionsmenge enthalten, so ist die Lösungsmenge die leere Menge $\mathbb{L} = \{\}$.

$-5 \cdot x - 4 = 6 \qquad x = -2$
$-5 \cdot (-2) - 4 = 6$
$6 = 6$ wahre Aussage
$\mathbb{G} = \mathbb{N} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{N} \qquad -2 \notin \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{\}$
$\mathbb{G} = \mathbb{Q} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \qquad -2 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-2\}$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad -2 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-2\}$

$\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x-1} \qquad x = -14$
$\frac{2}{-14+4} = \frac{3}{-14-1}$
$\frac{1}{-5} = \frac{1}{-5}$ wahre Aussage
Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
$x - 1 = 0 \qquad x = 1$
$x + 4 = 0 \qquad x = -4$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\} \qquad -14 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-14\}$

$\sqrt{x-7} = 4 \qquad x = 23$
$\sqrt{23-7} = 4$
4=4 wahre Aussage
Der Radikand muss größer gleich Null sein.
$x - 7 \geq 0 \qquad x \geq 7$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = [7; \infty[\qquad 23 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{23\}$

$\log_2(-x+2) = 3 \qquad x = -6$
$log_2(-(-6)+2) = 3$
$3 = 3$ (wahre Aussage)
Der Numerus muss größer als Null sein.
$-x + 2 > 0 \qquad x < -2$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} =]-\infty; -2[\qquad -6 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-6\}$

Äquivalenzumformung

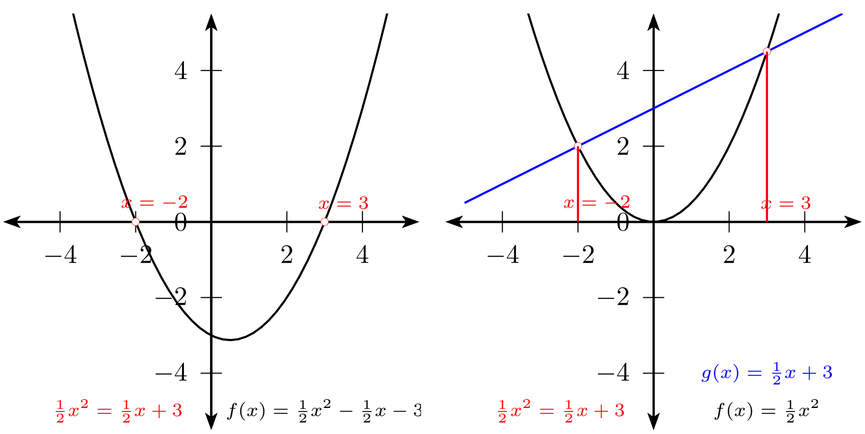
Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.
Äquivalenzumformungen von Gleichungen:
• Vertauschen der beiden Seiten
• Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
• Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
• Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
• Division mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
Quadrieren (Potenzieren mit einem geraden Exponenten) ist keine Äquivalenzumformung. Der berechnete Wert, muss durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung überprüft werden.

Vertauschen der beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad 8 = x - 2$
Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad / + 2$
$x - 2 + 2 = 8 + 2$
$x = 10$
Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
$3x - 2 = 2x + 3 \qquad / - 2x$
$3x - 2x - 2 = 2x - 2x + 3$
$x - 2 = 3$
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten
$\frac{2}{x-3} = 5 \qquad / \cdot (x - 3)$
$\frac{2 \cdot (x-3)}{x-3} = 5 \cdot (x - 3)$
$2 = 5(x - 3)$
Division durch den gleichen Term auf beiden Seiten
$4x = 8 \qquad / : 4$
$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$
$x = 2$

Quadrieren

$\sqrt{x} = -4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{x} = 4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$
$\sqrt{x}^2 = (-4)^2$	$\sqrt{x}^2 = 4^2$
$x = 16$	$x = 16$
$\sqrt{x} = -4$	$\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{16} \neq -4$	$\sqrt{16} = 4$
$\mathbb{L} = \{\}$	$\mathbb{L} = \{16\}$

1.3.2 Methoden



Graphische Methoden

• Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse:
- Gleichung nach Null auflösen
- Gleichung als Funktion schreiben
- Graph der Funktion zeichnen
- Lösung der Gleichung: Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) ablesen

• Schnittpunkt zwischen 2 Funktionen:
- linken und rechten Term als Funktionen schreiben
- Graphen der Funktionen zeichnen
- Lösung der Gleichung: x-Wert der Schnittpunkte der Graphen ablesen

Gleichung: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
Gleichung nach Null auflösen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$
Gleichung als Funktion schreiben
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Graphen der Funktionen zeichnen
Lösung der Gleichung: Schnittpunkte mit der x-Achse
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Gleichung: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
linken und rechten Term als Funktionen schreiben:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$
$g(x) = \frac{1}{2}x + 3$
Graphen der Funktionen zeichnen
Lösung der Gleichung: Schnittpunkte der Funktionen
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Numerische Methoden

- Gleichung nach Null auflösen
- Gleichung als Funktionsterm f(x) schreiben
- Nullstellen von f(x) berechnen

• Newtonverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Funktion ableiten: $f'(x)$
- Startwert x_0 wählen
- Funktionswerte $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ berechnen
- Werte einsetzen und 1. Näherung x_1 berechnen:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$-x_1$ einsetzen und 2. Näherung berechnen:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

• Intervallhalbierung

-unterschiedliche Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$
- Nullstelle liegt im Intervall $[a;b]$
- Mitte zwischen a und b ermitteln:

$m_1 = \frac{a+b}{2}$
- sind die Vorzeichen von $f(m_1)$ und $f(a)$ gleich, wird $a = m_1$
- sind die Vorzeichen von $f(m_1)$ und $f(b)$ gleich, wird $b = m_1$
- Mitte zwischen a und b ermitteln:

$m_2 = \frac{a+b}{2}$
- sind die Vorzeichen von $f(m_2)$ und $f(a)$ gleich, wird $a = m_2$
- sind die Vorzeichen von $f(m_2)$ und $f(b)$ gleich, wird $b = m_2$

usw.

Newtonverfahren
$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
Funktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Funktion ableiten:
$f'(x) = x - \frac{1}{2}$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Startwert: $x_0 = 4$
$f(4) = 3$
$f'(4) = 3\frac{1}{2}$
$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)}$
$x_1 = 4 - \frac{3}{3\frac{1}{2}}$
$x_1 = 3\frac{1}{7}$
$f(3\frac{1}{7}) = \frac{18}{49}$
$f'(3\frac{1}{7}) = 2\frac{9}{14}$
$x_2 = 3\frac{1}{7} - \frac{f(3\frac{1}{7})}{f'(3\frac{1}{7})}$
$x_2 = 3\frac{1}{7} - \frac{\frac{18}{49}}{2\frac{9}{14}}$
$x_2 = 3$
$f(3) = 0,00966$
$f'(3) = 2,5$
$x_3 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)}$
$x_3 = 3 - \frac{0,00966}{2,5}$
$x_3 = 3$

Intervallhalbierung
$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
Funktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle im Intervall$[1;4]$
$a = 1 \qquad b = 4$
$f(1) = -3 \quad f(4) = 1$
$m_1 = \frac{1+4}{2} = 2,5$
$f(2,5) = -2,625$
$a = m_1 = 2,5$
Nullstelle im Intervall$[2,5;4]$
$m_2 = \frac{2,5+4}{2} = 3,25$
$f(3,25) = 0,65625$
$b = m_2 = 3,25$
Nullstelle im Intervall$[2,5;3,25]$

Algebraische Methoden

- Lineare Gleichungen:

$ax + b = cx + d$

Lösung durch Auflösen nach der Variablen.

- Potenzgleichung:

$ax^2 + c = 0 \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

$ax^3 + b = 0 \qquad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$

Auflösen nach der Variablen und die Wurzel ziehen.

- Faktorisieren

Jeder Summenterm enthält die Variable mit unterschiedlichen Potenzen.

$ax^2 + bx = 0 \qquad x(ax + b) = 0$

$ax^3 + bx = 0 \qquad x(ax^2 + b) = 0$

$ax^3 + bx^2 = 0 \qquad x^2(ax + b) = 0$

Lösung der Gleichung durch Auflösen nach Null und faktorisieren des Terms. Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

- Quadratische Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$

Lösung mit Lösungsformel für quadratischen Gleichungen

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

- Kubische Gleichung mit Konstante:

$ax^3 + bx^2 + d = 0$

$ax^3 + cx + d = 0$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Lösung durch Polynomdivision.

- Biquadratische Gleichung: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Lösung durch Substitution.

- Terme und deren Umkehrung:

x^n	$x^{\frac{1}{n}}$
x^2	$\pm\sqrt{x}$
x^3	$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
$x^{\frac{m}{n}}$	$x^{\frac{n}{m}}$

a^x	$\log_a(x)$	$\sin(x)$	$\arcsin(a)$
e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(a)$
10^x	$\log_(x)$	$\tan(x)$	$\arctan(a)$

Lösung durch Auflösen nach dem Term und Anwendung von deren Umkehrung.

Lineare Gleichung

$2x + 4 = 6x + 7 \qquad / - 6x$

$-4x + 4 = 7 \qquad / - 4$

$-4x = 3 \qquad / : (-4)$

$x = -\frac{3}{4}$

Potenzgleichung:

$x^2 - 16 = 0 \qquad / + 16$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

Faktorisieren:

$x^3 - 16x = 0$

$x(x^2 - 16) = 0$

Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 16 = 0$

$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

Quadratische Gleichung:

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$

Gleichung nach Null auflösen:

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Umkehrung:

$2^x = 8 \qquad x = \log_2(8) \qquad x = 3$

$\log_2(x) = 3 \qquad x = 2^3 \qquad x = 8$

$e^{(3x+4)} = 3 \qquad / \ln$

$3x + 4 = \ln(3) \qquad / - 4 \qquad / : 3$

$x = -0,967$

1.3.3 Lineare Gleichung

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die eine Seite und alle Terme ohne Variable auf die andere Seite
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$2\frac{1}{2}x + 5 = 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4 \qquad / -5 \qquad / -2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x = 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren:
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x = -2$

$\mathbf{a \cdot x = b}$

$a \cdot x = b \qquad / : a$
$x = \frac{b}{a}$

$5 \cdot x = 45 \qquad / : 5$
$x = \frac{45}{5}$
$x = 9$

$-2 \cdot x = -6 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-6}{-2}$
$x = 3$

$\mathbf{x + a = b}$

$x + a = b \qquad / -a$
$x = b - a$

$x + 2 = 5 \qquad / -2$
$x = 5 - 2$
$x = 3$

$x + 5 = -7 \qquad / -5$
$x = -7 - 5$
$x = -12$

$\mathbf{a \cdot x + b = c}$

$a \cdot x + b = c \qquad / -b$
$a \cdot x = c - b \qquad / : a$
$x = \frac{c-b}{a}$

$5 \cdot x - 4 = 6 \qquad / +4$
$5 \cdot x = 10 \qquad / : 5$
$x = \frac{10}{5}$
$x = 2$

$-2 \cdot x + 4 = -6 \qquad / -4$
$-2 \cdot x = -10 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-10}{-2}$
$x = 5$

$\mathbf{\frac{x}{a} = b}$

$\frac{x}{a} = b \qquad / \cdot a$
$x = b \cdot a$

$\frac{x}{2} = 5 \qquad / \cdot 2$
$x = 5 \cdot 2$
$x = 10$

$\frac{x}{5} = -7 \qquad / \cdot 5$
$x = -7 \cdot 5$
$x = -35$

$\mathbf{a - x = b}$

$a - x = b \qquad / -a$
$-x = b - a \qquad / : (-1)$
$x = a - b$

$2 - x = 5 \qquad / -2$
$-x = 5 - 2$
$-x = 3 / : (-1)$
$x = -3$

$x - 5 = -7 \qquad / +5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$\mathbf{x - a = b}$

$x - a = b \quad / + a$
$x = b + a$

$x - 2 = 5 \quad / + 2$
$x = 5 + 2$
$x = 7$

$x - 5 = -7 \quad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$\mathbf{ax + b = cx + d}$

$ax + b = cx + d \quad / - cx$
$ax - cx + b = d \quad / - b$
$(a - c)x = d - b \quad / : (a - c)$
$a - c \neq 0$
$x = \frac{d-b}{a-c}$

$2x + 4 = 6x + 7 \quad / - 6x$
$-4x + 4 = 7 \quad / - 4$
$-4x = 3 \quad / : (-4)$
$x = -\frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte:
$a \cdot x + b = c$ | $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ | $a \cdot x + b = 0$ | $a \cdot x = d$

1.3.4 Quadratische Gleichung

Umformen: $\mathbf{ax^2 + c = 0}$

$ax^2 + c = 0 \quad / - c$
$ax^2 = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6} = 0 \quad / - \frac{1}{6}$
$-\frac{2}{3}x^2 = -\frac{1}{6} \quad / : (-\frac{2}{3})$
$x^2 = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{2}{3}}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

Faktorisieren: $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$
$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{-b}{a}$

$-2x^2 - 8x = 0$
$x(-2x - 8) = 0$
$x_1 = 0$
$-2x - 8 = 0 \quad / + 8$
$-2x = 8 \quad / : (-2)$
$x = \frac{8}{-2}$
$x_2 = -4$

$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x_1 = 0$
$x - 1 = 0 \quad / + 1$
$x = 1$
$x_2 = 1$

Lösungsformel (Mitternachtsformel): $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Diskriminante:

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2}$

$x_1 = \dfrac{-3 + 7}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-3 - 7}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

p-q Formel: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

$x^2 + px + q = 0$

$x_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante:

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1/2} = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - (-10)}$

$x_{1/2} = -1\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{12\dfrac{1}{4}}$

$x_{1/2} = -1\dfrac{1}{2} \pm 3\dfrac{1}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

Satz von Vieta: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

$x^2 + px + q = 0$

x_1, x_2 sind die Lösungen der Gleichung

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$p = 3 \quad q = -10$

$x_1 + x_2 = -3$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$2 - 5 = -3$

$2 \cdot (-5) = -10$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

$(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

Interaktive Inhalte:

$ax^2 + bx + c = 0$

1.3.5 Kubische Gleichungen

Umformen: $\mathbf{ax^3 + b = 0}$

$ax^3 + b = 0$
$ax^3 + b = 0 \qquad / - b$
$ax^3 = -b \qquad / : a$
$x^3 = \frac{-b}{a}$
$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[3]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$3x^3 + 24 = 0$
$3x^3 + 24 = 0 \qquad / - 24$
$3x^3 = -24 \qquad / : 3$
$x^3 = \frac{-24}{3}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$

$-3x^3 + 24 = 0$
$-3x^3 + 24 = 0 \qquad / - 24$
$-3x^3 = -24 \qquad / : (-3)$
$x^3 = \frac{-24}{-3}$
$x = \sqrt[3]{8}$
$x = 2$

Faktorisieren: $\mathbf{ax^3 + bx = 0}$

$ax^3 + bx = 0$
$x(ax^2 + b) = 0$
$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad (ax^2 + b) = 0$

$-9x^3 + 25x = 0$
$x(-9x^2 + 25) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad -9x^2 + 25 = 0$
$-9x^2 + 25 = 0 \qquad / - 25$
$-9x^2 = -25 \qquad / : (-9)$
$x^2 = \frac{-25}{-9}$
$x = \pm\sqrt{2\frac{7}{9}}$
$x_2 = 1\frac{2}{3} \qquad x_3 = -1\frac{2}{3}$

Faktorisieren: $\mathbf{ax^3 + bx^2 = 0}$

$ax^3 + bx^2 = 0$
$x^2(ax + b) = 0$
$x_{1/2} = 0 \qquad \vee \qquad (ax + b) = 0$

$-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x^2(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$
$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 13\frac{1}{2}$
$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \qquad / : \left(-6\frac{3}{4}\right)$
$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$
$x_3 = -2$

Polynomdivision

$ax^3 + bx^2 + d = 0$

$ax^3 + cx + d = 0$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

• Die ganzzahligen Faktoren von d in die Funktion einsetzen. Wird bei einem Faktor der Funktionswert Null, hat man eine Nullstelle x_0 gefunden.

• Wenn x_0 ein Nullstelle von f(x) ist, so ist f(x) durch $(x - x_0)$ ohne Rest teilbar.

• Mit dem Linearfaktor $(x - x_0)$ wird die Polynomdivision durchgeführen.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x - x_0) = fx^2 + dx + e$

$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x - x_0) \cdot (fx^2 + dx + e)$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$d = 4$ Ganzzahlige Faktoren: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$f(1) = 0$

Nullstelle gefunden: $x_1 = 1$

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 &) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 & \\
 & -(4x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & 4x & -4 & \\
 & & -(4x & -4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{2}$

$x_2 = \frac{-4 + 0}{2}$ $\qquad x_3 = \frac{-4 - 0}{2}$

$x_2 = -2$ $\qquad x_3 = -2$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.3.6 Gleichungen höheren Grades

Gerader Exponent: $\mathbf{ax^n + c = 0}$

$ax^n + c = 0 \quad / - c$

$ax^n = -c \quad / : a$

$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{\frac{-c}{a}}$

Diskriminante:

$D = \frac{-c}{a}$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$-2x^4 + 162 = 0 \qquad / - 162$

$-2x^4 = -162 \qquad / : (-2)$

$x^4 = \frac{-162}{-2}$

$x = \pm \sqrt[4]{81}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

Ungerader Exponent: $\mathbf{ax^n + c = 0}$

$ax^n + b = 0$

$ax^n + b = 0 \qquad / - b$

$ax^n = -b \qquad / : a$

$x^n = \frac{-b}{a}$

$x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$

$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$

$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[n]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$5x^3 + 320 = 0 \qquad / - 320$

$5x^3 = -320 \qquad / : 5$

$x^3 = -\frac{320}{5}$

$x = -\sqrt[3]{64}$

$x = -4$

Biquadratische Gleichung (Substitution)

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

Substitution: $u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

Quadratische Gleichung: $au^2 + bu + c = 0$

Lösungen: $u_1 \qquad u_2$

Resubstitution: $x^2 = u_1 \qquad x^2 = u_2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$1u^2 - 10u + 9 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$

$u_{1/2} = \frac{10 \pm 8}{2}$

$u_1 = \frac{10 + 8}{2} \qquad u_2 = \frac{10 - 8}{2}$

$u_1 = 9 \qquad u_2 = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_3 = 1 \qquad x_4 = -1$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.3.7 Bruchgleichung

Überkreuzmultiplikation

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Das Produkt aus dem Zähler des linken Bruchs und dem Nenner des rechten Bruchs ist gleich dem Produkt aus dem Nenner des linken Bruchs und dem Zähler des rechten Bruchs.
- Gleichung lösen.
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$\frac{a}{bx + c} = \frac{d}{ex + f} \qquad a \cdot (ex + f) = d \cdot (bx + c)$

$\frac{2}{x + 4} = \frac{3}{x - 1}$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$

Überkreuzmultiplikation: $2 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x + 4)$

$2x - 2 = 3x + 12$

$x = -14$

Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren.
- Gleichung lösen.
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$\frac{2}{5x} = \frac{1}{x+3}$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$
Hauptnenner:5x(x+3)
$\frac{2 \cdot 5x(x+3)}{5x} = \frac{1 \cdot 5x(x+3)}{(x+3)}$
$2 \cdot (x+3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

1.3.8 Exponentialgleichungen

$\mathbf{b^x = a}$

$\bullet\mathbf{b^x = a \quad a > 0}$
$b^x = a \quad / \log_b ...$
$\log_b (b^x) = \log_b (a)$
Logarithmengesetz: $log_b b^x = x \log_b b = x$
$x = \log_b (a)$
$\bullet\mathbf{e^x = a \quad a > 0}$
Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)
$e^x = a \quad a > 0$
$e^x = a \qquad / \ln ...$
$\ln (e^x) = \ln (a)$
Logarithmengesetz: $lne^x = x \ln e = x$
$x = \ln (a)$
$\bullet\mathbf{10^x = a \quad a > 0}$
Basis: 10
$10^x = a \quad a > 0$
$10^x = a \qquad / \lg ...$
$\lg (10^x) = \lg (a)$
Logarithmengesetz: $lg10^x = x \lg 10 = x$
$x = \lg (a)$

$2^x = 8$
$x = \log_2 (8)$
$x = 3$

$e^x = 4$
$x = ln (4)$
$x = 1,39$

$\mathbf{a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0}$

$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$
$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0 \qquad / - f$
$a \cdot b^{(cx+d)} = -f \qquad / : a$
$b^{(cx+d)} = \frac{-f}{a} \qquad / \log_b(...)$
$\frac{-f}{a} > 0 \Rightarrow$
$\log_b \left(b^{(cx+d)}\right) = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right)$
Logarithmengesetz: $log_b b^n = n \log_b b = n$
$(cx+d) \log_b(b) = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right)$
$cx + d = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right) \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \frac{\log_b\left(\frac{-f}{a}\right) - d}{c}$
$\frac{-f}{a} \leq 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0 \qquad / - 4$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} = -4 \qquad / : -2$
$2^{(2x+3)} = 2 \qquad / \log_2$
$2x + 3 = \log_2(2) \qquad / - 3 \qquad / : 2$
$x = -1$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0$
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0 \qquad / + 6$
$2 \cdot e^{(3x+4)} = +6 \qquad / : 2$
$e^{(3x+4)} = 3 \qquad / \ln$
$3x + 4 = \ln(3) \qquad / - 4 \qquad / : 3$
$x = -0,967$

Interaktive Inhalte:
$b^x = a$ | $e^x = a$ | $ab^{(cx+d)} + f = 0$ | $ae^{(cx+d)} + f = 0$

1.3.9 Logarithmusgleichungen

$\log_{\mathbf{b}} \mathbf{x} = \mathbf{a}$

• $\log_{\mathbf{b}} \mathbf{x} = \mathbf{a} \quad /\mathbf{b}$
$x = b^a$
• $\lg \mathbf{x} = \mathbf{a} \quad /\mathbf{10}$
$x = 10^a$
• $\ln \mathbf{x} = \mathbf{a} \quad /\mathbf{e}$
$x = e^a$

$log_2 x = 3$
$x = 2^{(3)}$
$x = 8$

$ln(x) = 1,39$
$x = e^{(1,39)}$
$x = 4$

$\mathbf{a \log_b(cx+d) + f = 0}$

$a \log_b(cx+d) + f = 0$
$a \log_b(cx+d) + f = 0 \qquad / - f$
$a \log_b(cx+d) = -f \qquad / : a$
$\log_b(cx+d) = \frac{-f}{a} \qquad /b$
$b^{(\log_b(cx+d))} = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)}$
$cx + d = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \frac{b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} - d}{c}$

$2 \cdot log_3(4x+5) - 4 = 0$
$2 \cdot log_3(4x+5) - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2 \cdot log_3(4x+5) = +4 \qquad / : 2$
$\log_3(4x+5) = 2 \qquad /3^{..}$
$4x + 5 = 3^2 \qquad / - 5 \qquad / : 4$
$x = \frac{3^2 - 5}{4}$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$\log_e x = lnx \quad 4 \cdot ln(5x+7) + 8 = 0$
$4 \cdot ln(5x+7) + 8 = 0 \qquad / - 8$
$4 \cdot ln(5x+7) = -8 \qquad / : 4$
$\ln(5x+7) = -2 \qquad /e^{..}$
$5x + 7 = e^{-2} \qquad / - 7 \qquad / : 5$
$x = \frac{e^{-2} - 7}{5}$
$x = -1,37$

Interaktive Inhalte:
$log_b x = a$ | $ln(x) = a$ | $a \log_b(cx+d) + f = 0$ | $a \ln(cx+d) + f = 0$

1.3.10 Trigonometrische Gleichungen

Grundlagen trigonometrische Gleichungen

• Lösung der Gleichungen:
$\sin(\alpha) = a \quad \cos(\alpha) = a \quad \tan(\alpha) = a$

• Der Arkussinus (Arcuscosinus,Arkustangens) des Betrags von a ist die Lösung im 1. Quadranten.
Gradmaß(DEG):
$\alpha' = \arcsin(|a|) = \sin^{-1}(|a|)$
$\alpha' = \arccos(|a|) = \cos^{-1}(|a|)$
$\alpha' = \arctan(|a|) = \tan^{-1}(|a|)$
Bogenmaß(RAD):
$x' = \arcsin(|a|) = \sin^{-1}(|a|)$
$x' = \arccos(|a|) = \cos^{-1}(|a|)$
$x' = \arctan(|a|) = \tan^{-1}(|a|)$

• Je nach Vorzeichen von a die Quadranten wählen.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
I. Quadrant	+	+	+
II. Quadrant	+	-	-
III. Quadrant	-	-	+
IV. Quadrant	-	+	-

• Umrechnen des Winkels in die Quadranten.

	DEG	RAD
I. Quadrant	α	x
II. Quadrant	$180° - \alpha$	$\pi - x$
III. Quadrant	$180° + \alpha$	$\pi + x$
IV. Quadrant	$360° - \alpha$	$2\pi - x$

• Der Sinus und Kosinus sind periodisch mit der Periode $2\pi(360°)$.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{\alpha+k \cdot 360°\}$ (DEG)
$\mathbb{L} = \{x+k \cdot 2\pi\}$(RAD)
- Der Tangens ist periodisch mit der Periode $\pi(180°)$.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{\alpha+k \cdot 180°\}$ (DEG)
$\mathbb{L} = \{x+k \cdot \pi\}$(RAD)

Winkel in Gadmaß:$\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$sin\alpha = -\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Lösung im III Quadrant und IV Quadrant
$\alpha' = sin^{-1}(|-\frac{1}{2}|) = 30°$
III Quadrant: $\alpha_1 = 180° + 30° = 210°$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{210°+k \cdot 360°\}$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 30° = 330°$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{330°+k \cdot 360°\}$
$\mathbb{D} = [0; 360°] \quad \mathbb{L} = \{210°; 330°\}$

Winkel in Bogenmaß:x $\quad k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -\frac{1}{2}$
$x = sin^{-1}(-\frac{1}{2})$
$x' = sin^{-1}(|-\frac{1}{2}|) = 0,524$
III Quadrant: $x_1 = \pi + 0,524 = 3,67$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{3,67+k \cdot 2\pi\}$
IV Quadrant: $x_2 = 2\pi - 0,524 = 5,76$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{5,76+k \cdot 2\pi\}$

] **Sinus durch Kosinus = Tangens**

$a\sin(x) = b\cos(x) \qquad / : a / : \cos(x)$
$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{b}{a}$
$\tan(x) = \frac{b}{a}$
$x = \arctan(\frac{b}{a})$

$8\sin(x) = 4\cos(x) \qquad / : 8 / : \cos(x)$
$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{4}{8}$
$\tan(x) = \frac{1}{2}$
$x = \arctan(\frac{1}{2})$
$x = 9,463(RAD) \qquad \alpha = 26,56^{\circ}(DEG)$

Interaktive Inhalte:
$\sin\alpha = a \quad \sin x = a$ | $\cos\alpha = a \quad \cos x = a$ | $\tan\alpha = a \quad \tan x = a$

1.3.11 Betragsgleichung

$|\mathbf{ax + b}| = \mathbf{c}$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

- Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

- Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor den Term geschrieben wird. $ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$ax + b = c$
$ax + b = c \quad / - b \quad / : a$
$x = \frac{c-b}{a}$

- 1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{c-b}{a}$
- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$-(ax + b) = c \quad / : (-1)$
$ax + b = -c$
$ax + b = -c \quad / - b \quad / : a$
$x = \frac{-c-b}{a}$

- 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x > \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{-c-b}{a}$
- Gesamtlösung ensteht aus der Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x + 3| = 7$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x + 3 = 7$
$2x + 3 = 7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = 2$
1. Lösung $x = 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x + 3) = 7$
$2x + 3 = -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = -5$
2. Lösung $x = -5$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$x = 2 \quad \vee \quad x = -5$

$|2x + 3| = -7$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x + 3 = -7$
$2x + 3 = -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = -5$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = -5$
1. Lösung ist leere Menge

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x + 3) = -7$
$2x + 3 = +7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = 2$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = 2$
2. Lösung ist leere Menge
Gesamtlösung ist leere Menge

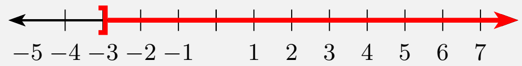
1.4 Ungleichungen

1.4.1 Grundlagen

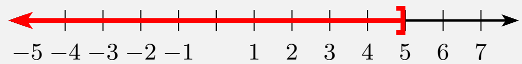
Ungleichheitszeichen

$x < b$	kleiner als	weniger als
$x > b$	größer als	mehr als
$x \leq b$	kleiner oder gleich	höchstens
$x \geq b$	größer oder gleich	mindestens

$x > -3$



$x \leq 5$



Intervalle in der Mengenschreibweise

offenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x < b$	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert a < x < b\}$
$x < b$	$]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert x < b\}$
$x > a$	$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \vert x > a\}$

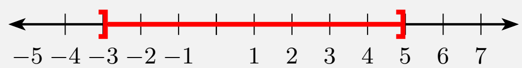
halboffenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x \leq b$	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a < x \leq b\}$
$a \leq x < b$	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x < b\}$
$x \leq b$	$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert x \leq b\}$
$x \geq a$	$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \vert x \geq a\}$

abgeschlossenes Intervall

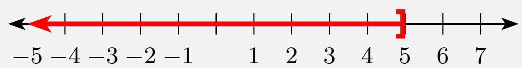
Intervall	Mengenschreibweise
$a \leq x \leq b$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x \leq b\}$

$]-3; 5] = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 5\}$



$-3 \notin]-3; 5]$ $\quad 5 \in]-3; 5]$ $\quad -1 \in]-3; 5]$ $\quad 6 \notin]-3; 5]$

$]-\infty; 5] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$



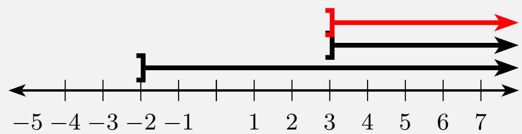
$-123 \in]-\infty; 5]$ $\quad 5 \in]-\infty; 5]$ $\quad 6 \notin]-\infty; 5]$

Schnittmenge $\cap$ - und zugleich $\wedge$

$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

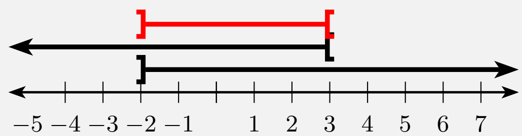
Intervall		Mengen	
$x > a \wedge x > b$	$x > b$	$]a; \infty[\cap]b; \infty[$	$]b; \infty[$
$x < a \wedge x < b$	$x < a$	$]-\infty; a[\cap]-\infty; b[$	$]-\infty; a[$
$x > a \wedge x < b$	$a < x < b$	$]a; \infty[\cap]-\infty; b[$	$]a; b[$
$x < a \wedge x > b$	$\{\}$	$]-\infty; a[\cap]b; \infty[$	$\{\}$

$x > -2 \wedge x > 3 = x > 3 \quad]-2; \infty[\cap]3; \infty[=]3; \infty[$

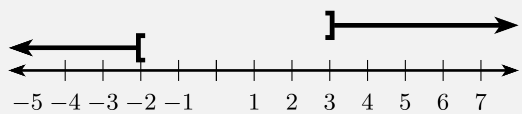


$x < -2 \wedge x < 3 = x < -2 \quad]-\infty; -2[\cap]-\infty; 3[=]-\infty; -2[$

$x > -2 \wedge x < 3 = -2 < x < 3 \quad]-2; \infty[\cap]-\infty; 3[=]-2; 3[$



$x < -2 \wedge x > 3 = \{\} \quad]-\infty; -2[\cap]3; \infty[= \{\}$

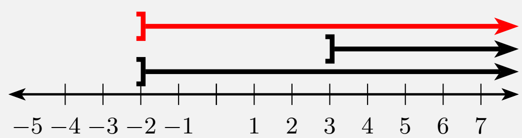


Vereinigungsmenge $\cup$ - oder auch $\vee$

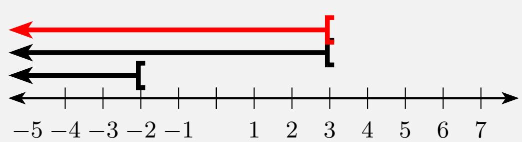
$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \vee x > b$	$x > a$	$]a; \infty[\cup]b; \infty[$	$]a; \infty[$
$x < a \vee x < b$	$x < b$	$]-\infty; a[\cup]-\infty; b[$	$]-\infty; b[$
$x > a \vee x < b$	$x \in \mathbb{R}$	$]a; \infty[\cup]-\infty; b[$	$\mathbb{R}$
$x < a \vee x > b$		$]-\infty; a[\cup]b; \infty[$	$\mathbb{R} \setminus [a; b]$

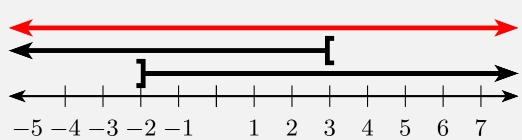
$x > -2 \vee x > 3 = x > -2 \quad]-2; \infty[\cup]3; \infty[=]-2; \infty[$



$x < -2 \vee x < 3 = x < 3 \quad]-\infty; -2[\cup]-\infty; 3[=]-\infty; 3[$



$x > -2 \vee x < 3 = x \in \mathbb{R} \quad]-2; \infty[\cup]-\infty; 3[= \mathbb{R}$



$x < -2 \vee x > 3 \quad]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$

1.4.2 Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht.

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- Vertauschen der beiden Seiten ⇒ Umdrehen des Ungleichheitszeichens
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Multiplikation mit einer negativen Zahl ⇒ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

- Division durch mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Division mit einer negativen Zahl ⇒ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

Vertauschen der beiden Seiten

$x - 2 > 8 \qquad 8 < x - 2$

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten

$x - 2 > 8 \qquad / + 2$

$x - 2 + 2 > 8 + 2$

$x > 10$

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten

$3x - 2 \leq 2x + 3 \qquad / - 2x$

$3x - 2x - 2 \leq 2x - 2x + 3$

$x - 2 \leq 3$

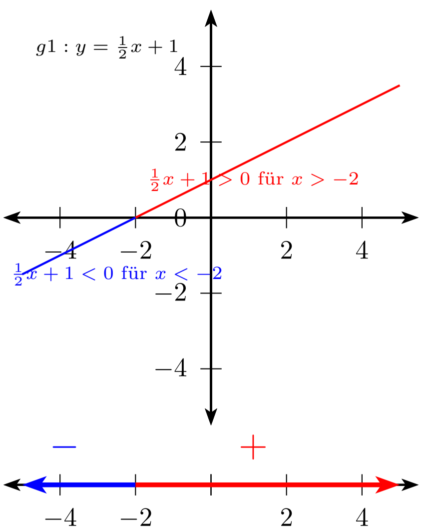
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

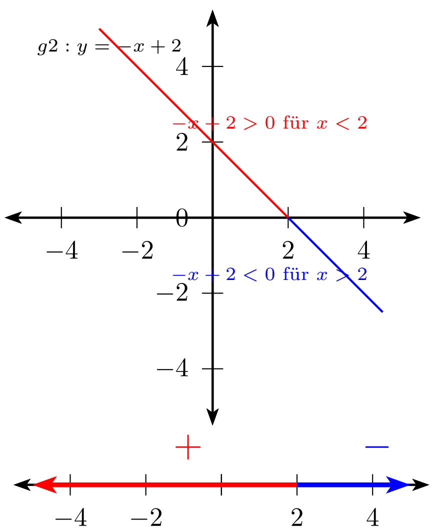
$\frac{x}{2} < -4 \qquad / \cdot 2$	$\frac{x}{-2} < -4 \qquad \cdot (-2)$
$\frac{x}{2} \cdot 2 < -4 \cdot 2$	$\frac{x}{-2} \cdot (-2) > -4 \cdot (-2)$
$x < -8$	$x > 8$

Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$2x > -4 \qquad / : 2$	$\frac{x}{-2} > -4 \qquad / : (-2)$
$\frac{x}{2} \cdot 2 > -4 \cdot 2$	$\frac{x}{-2} \cdot (-2) < -4 : (-2)$
$x > -8$	$x < 8$

1.4.3 Lineare Ungleichung





Algebraische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die linke Seite und alle Terme ohne Variable auf die rechte Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

Division oder Multiplikation mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x \leq 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren
$\frac{1}{2}x \leq -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x \leq \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

$-x + 2 > 0$
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x > -2 \qquad / : (-1)$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

Graphische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $y > 0$
- Graph ist unterhalb der x-Achse $y < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0$
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Graph zeichnen g_1
$y \leq 0$ der Graph ist unterhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2 \quad y > 0$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Graph zeichnen g_2
$y > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x < 2 \qquad \in]-\infty; 2[$

Vorzeichentabelle

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle:

Das Vorzeichen einer linearen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

	$x <$	x_1	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$ax + b > 0$		$ax + b < 0$

	$x <$	x_1	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$ax + b < 0$		$ax + b > 0$

$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0 \quad -$ negative Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = -4$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -1$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (0) + 1 = +1$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$\frac{1}{2}x + 1 < 0$		$\frac{1}{2}x + 1 > 0$

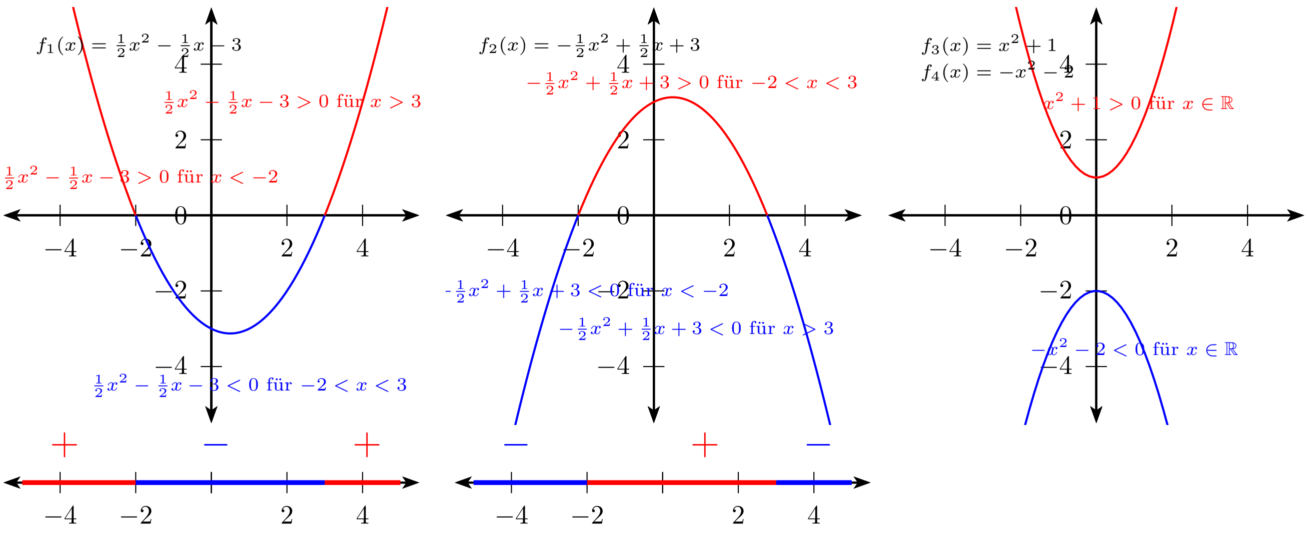
Lösung der Ungleichung: $\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
$y > 0 \quad +$positive Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g2 : y = -0 + 1 = +1$ Pluszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 2$
$g2 : y = -2 + 1 = -1$ Minuszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$-x + 2 > 0 \quad x < 2$		$-x + 2 < 0 \quad x > 2$

Lösung der Ungleichung: $-x + 2 > 0$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

1.4.4 Quadratische Ungleichung



Algebraische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- 1. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- quadratische Ergänzung
- quadratischen Term alleinstellen
- Wurzelziehen und Betrag schreiben
- Betragsungleichung lösen
- 2. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- Term faktorisieren

$a(x - x_1)(x - x_2)$

- Auspalten in lineare Ungleichungen

1. Fall $\quad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$(+ \cdot + = +) \vee (- \cdot - = +)$

$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 > 0) \vee$

$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 < 0)$

2. Fall $\quad a(x - x_1)(x - x_2) < 0$

$(+ \cdot - = -) \vee (- \cdot + = -)$

$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee$

$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 > 0)$

- Zusammenfassen der einzelnen Lösungen

1. Methode

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$

quadratische Ergänzung

$\frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}^2 - 6) > 0$

$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6] > 0$

$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}] > 0$

$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - 3\frac{1}{8} > 0$

quadratischen Term alleinstellen

$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{25}{4}$

Wurzelziehen und Betrag schreiben

$|x - \frac{1}{2}| > \frac{5}{2}$

Betragsungleichung

$x > 3 \quad \vee \quad x < -2$

2. Methode

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$

Term faktorisieren

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

$\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) > 0$

Aufspalten in lineare Ungleichungen

$(\frac{1}{2}(x + 2) > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (\frac{1}{2}(x + 2) < 0 \wedge x - 3 < 0)$

$(x > -2 \wedge x > 3) \vee (x < -2 \wedge x < 3)$

Lösungen zusammenfassen

$x > 3 \vee x < -2$

Graphische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $f(x) > 0$
- Graph unterhalb der x-Achse $f(x) < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
Graph zeichnen $f_1(x)$
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x > 3 \vee x < -2$

Vorzeichentabelle

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle:

Das Vorzeichen einer quadratischen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
Wert kleiner als die Nullstelle $x_1 = -2$ wählen $\quad x = -4$
$f_1(-4) = +7$ Pluszeichen eintragen
Wert zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 0$
$f_1(0) = -3$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 4$
$f_1(4) = +3$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
x-Bereiche aus der Vorzeichentabelle ablesen
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]3; \infty[$

1.4.5 Betragsungleichung

$|ax+b| > c$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax+b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax+b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$|ax+b| = \begin{cases} (ax+b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$ax+b > c$

$ax+b > c \quad / -b \quad / : a \qquad (a > 0)$

$x > \frac{c-b}{a}$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x > \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$-(ax+b) > c \quad / : (-1)$

$ax+b < -c$

$ax+b < -c \quad / -b \quad / : a \quad (a > 0)$

$x < \frac{-c-b}{a}$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x < \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x+3| > 7$

$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x+3 > 7$

$2x+3 > 7 \quad / -3 \quad / : 2$

$x > 2$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x > 2$

1. Lösung $x > 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x+3) > 7$

$2x+3 < -7 \quad / -3 \quad / : 2$

$x < -5$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x < -5$

2. Lösung $x < -5$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$x > 2 \quad \vee \quad x < -5$

$|2x+3| < 7$

$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x+3 < 7$

$2x+3 < 7 \quad / -3 \quad / : 2$

$x < 2$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x < 2$

1. Lösung $\frac{-3}{2} \leq x < 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x+3) < 7$

$2x+3 > -7 \quad / -3 \quad / : 2$

$x > -5$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x > -5$

2. Lösung $-5 < x < \frac{-3}{2}$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$-5 < x < 2$

1.5 Lineares Gleichungssystem

1.5.1 Einsetzverfahren (2)

$I \qquad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \qquad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- Gleichung I oder II nach x oder y auflösen
- Term in die andere Gleichung einsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- zweite Unbekannte berechnen

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / -5y$
$3x = 19 - 5y \qquad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
I in II
$7(6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y) + 5y = 31$
$44\frac{1}{3} - 11\frac{2}{3}y + 5y = 31 \qquad / -44\frac{1}{3}$
$-11\frac{2}{3}y + 5y = 31 - 44\frac{1}{3}$
$-6\frac{2}{3}y = -13\frac{1}{3} \qquad / : \left(-6\frac{2}{3}\right)$
$y = \frac{-13\frac{1}{3}}{-6\frac{2}{3}}$
$y = 2$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot 2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / -3x$
$5y = 19 - 3x \qquad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
I in II
$7x + 5(3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x) = 31$
$19 - 3x + 5x = 31 \qquad / -19$
$-3x + 5x = 31 - 19$
$4x = 12 \qquad / : 4$
$x = \frac{12}{4}$
$x = 3$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)

$I \qquad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \qquad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- beide Gleichungen nach x oder y auflösen
- Terme gleichsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- zweite Unbekannte berechnen

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / -3x$
$5y = 19 - 3x \qquad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
II nach y auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \qquad / -7x$
$5y = 31 - 7x \qquad / : 5$
$y = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x$
I = II
$3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x \qquad / + \frac{3}{5}x$
$3\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x \qquad / -6\frac{1}{5}$
$-2\frac{2}{5} = -\frac{4}{5}x \qquad / : \left(-\frac{4}{5}\right)$
$x = 3$
x in I
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / -5y$
$3x = 19 - 5y \qquad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
II nach x auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \qquad / -5y$
$7x = 31 - 5y \qquad / : 7$
$x = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y$
I = II
$6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y \qquad / + 1\frac{2}{3}y$
$6\frac{1}{3} = 4\frac{3}{7} + \frac{20}{21}y \qquad / -4\frac{3}{7}$
$1\frac{19}{21} = \frac{20}{21}y \qquad / : \frac{20}{21}$
$y = 2$
y in I
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.3 Additionsverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

• Terme mit x und y müssen untereinander stehen
• Gleichungen multiplizieren, so dass die Variablen beim spaltenweisen addieren herausfallen
• Gleichung nach der Unbekannten auflösen
• zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 7$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-3)$
$I \quad 21x + 35y = 133$
$II \quad -21x - 15y = -93$
I + II
$21x - 21x + 35y - 15y = 133 - 93$
$20y = 40 \quad / : 20$
$y = \frac{40}{20}$
$y = 2$
y in I
$I \quad 3x + 5 \cdot 2 = 19$
$3x + 10 = 19 \quad / - 10$
$3x = 19 - 10$
$3x = 9 \quad / : 3$
$x = \frac{9}{3}$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 1$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-1)$
$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad -7x - 5y = -31$
I + II
$3x - 7x + 5y - 5y = 19 - 31$
$-4x = -12 \quad / : (-4)$
$x = \frac{-12}{-4}$
$x = 3$
x in I
$I \quad 3 \cdot 3 + 5y = 19$
$5y + 9 = 19 \quad / - 9$
$5y = 19 - 9$
$5y = 10 \quad / : 5$
$y = \frac{10}{5}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.4 Determinantenverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2$$
$$D_x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1 \cdot b2 - b1 \cdot c2$$
$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

• Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$
$x = \frac{D_x}{D_h}$
$y = \frac{D_y}{D_h}$

• Keine Lösung $D_h = 0$
$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$
• Unendlich viele Lösungen
$D_h = D_x = D_y = 0$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$$D_h = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = -20$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 31 & 5 \end{vmatrix} = 19 \cdot 5 - 5 \cdot 31 = -60$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 7 & 31 \end{vmatrix} = 3 \cdot 31 - 19 \cdot 7 = -40$$
$x = \frac{-60}{-20}$
$x = 3$
$y = \frac{-40}{-20}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.5 Determinantenverfahren (3)

$a1x + b1y + c1z = d1$

$a2x + b2y + c2z = d2$

$a3x + b3y + c3z = d3$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{matrix}$$

$D_h = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$

$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_x = \begin{vmatrix} d1 & b1 & c1 \\ d2 & b2 & c2 \\ d3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} d1 & b1 \\ d2 & b2 \\ d3 & b3 \end{matrix}$$

$D_x = d1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot d3 + c1 \cdot d2 \cdot b3$

$- c1 \cdot b2 \cdot d3 - d1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot d2 \cdot c3$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & d1 & c1 \\ a2 & d2 & c2 \\ a3 & d3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & d1 \\ a2 & d2 \\ a3 & d3 \end{matrix}$$

$D_y = a1 \cdot d2 \cdot c3 + d1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot d3$

$- c1 \cdot d2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot d3 - d1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_z = \begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d2 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{matrix}$$

$D_z = a1 \cdot b2 \cdot d3 + b1 \cdot d2 \cdot a3 + d1 \cdot a2 \cdot b3$

$- d1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot d2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot d3 = 0$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$x = \frac{D_x}{D_h}$

$y = \frac{D_y}{D_h}$

$z = \frac{D_z}{D_h}$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$ oder $D_z \neq 0$

- Unendlich viele Lösungen

$D_h = D_x = D_y = D_z = 0$

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

$$D_h = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$D_h = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_x = \begin{vmatrix} 37 & 13 & 4 \\ 40 & 14 & 5 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 37 & 13 \\ 40 & 14 \\ 15 & 3 \end{matrix}$$

$D_x = 37 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 15 + 4 \cdot 40 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 15 - 37 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 40 \cdot 3 = 54$

$$D_y = \begin{vmatrix} 11 & 37 & 4 \\ 12 & 40 & 5 \\ 9 & 15 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 37 \\ 12 & 40 \\ 9 & 15 \end{matrix}$$

$D_y = 11 \cdot 40 \cdot 3 + 37 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 15$

$-4 \cdot 40 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 15 - 37 \cdot 12 \cdot 3 = 108$

$$D_z = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 37 \\ 12 & 14 & 40 \\ 9 & 3 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$D_z = 11 \cdot 14 \cdot 15 + 13 \cdot 40 \cdot 9 + 37 \cdot 12 \cdot 3$

$-37 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 40 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 15 = 0$

$x = \frac{54}{54}$

$x = 1$

$y = \frac{108}{54}$

$y = 2$

$z = \frac{0}{54}$

$z = 0$

$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.6 Lineare Algebra

1.6.1 Matrix

Definition

Eine $m \times n$–*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$\text{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ik})$

a_{ik} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

• Quadratische Matrix

Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten.

$m = n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

3×3Quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3$

$a_{21} = 4 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 6$

$a_{31} = 7 \quad a_{32} = 8 \quad a_{33} = 9$

2×3 Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1×3 Zeilenmatrix (Zeilenvektor)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3×1 Spaltenmatrix (Spaltenvektor)

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Besondere Matrizen

• Einheitsmatrix

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Transponierte Matrix

Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A = (A^T)^T$

symmetrische Matrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nullmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Summe der Matrix $A = (a_{ik})$ und der Matrix $B = (b_{ik})$
Die Anzahl der Spalten (i) und der Zeilen(k) der beiden Matrizen müssen gleich sein. $A + B = a_{ik} + b_{ik}$

- Summe 2×2 Matrix
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$
- Summe 3×3 Matrix
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + a_{33} \end{bmatrix}$$

Summe zweier 2×3 Matrizen
$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

- Produkt aus der Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda A = \lambda a_{ik}$

2×2 Matrix
$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

- Produkt aus Matrix $A = (a_{ij})$ und Matrix $B = (b_{jk})$

Anzahl der Zeilen von A muss gleich der Anzahl der Spalten von B sein.
Zeilenelemente von A mal Spaltenelemente von B.

- Produkt zweier 2×2 Matrizen
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit 3
$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$
Produkt 2×3 Matrix mit einer 3×2 Matrix
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + (-7) \cdot (-2) + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

• Produkt aus der Matrix A und der inversen Matrix A^{-1} ist gleich der Einheitsmatrix.

$AA^{-1} = E$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Die inverse Matrix ist nur möglich, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

$\det A \neq 0$

• Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

Matrix A und Einheitsmatrix E in der Form schreiben

A		E	
a_{11}	a_{12}	1	0
a_{21}	a_{22}	0	1

Umformen durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

in die Form Einheitsmatrix und inverse Matrix $A^{-}1$ bringen.

E		A^{-1}	
1	0	x_{11}	x_{12}
0	1	x_{21}	x_{22}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$det(A) = (-10) \Rightarrow$ Matrix ist invertierbar

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zeile2 = Zeile2 - Zeile1 $\cdot \frac{4}{2}$

$a21 = 4 - 2 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$a22 = 1 - 3 \cdot \frac{4}{2} = -5$

$b21 = 0 - 1 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$b22 = 1 - 0 \cdot \frac{4}{2} = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zeile1 = Zeile1 - Zeile2 $\cdot \frac{3}{-5}$

$a12 = 3 - (-5) \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$b11 = 1 - (-2) \cdot \frac{3}{-5} = 1$

$b12 = 0 - 1 \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zeile1 = Zeile1 : 2

Zeile2 = Zeile2 : −5

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

A			E		
1	2	−1	1	0	0
2	5	−1	0	1	0
1	2	0	0	0	1

E			$E' = A^{-1}$		
1	0	0	2	−2	3
0	1	0	−1	1	−1
0	0	1	−1	0	1

Eigenwert und Eigenvektor

Gegegeben: A - Matrix

Gesucht: x - Eigenvektor (Spaltenvektor)

λ - *Eigenwert*

Das Produkt aus Matrix A und Eigenvektor x ist gleich dem Produkt aus Eigenwert λ und Eigenvektor x.

$Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

• Eigenwert aus folgender Gleichung:

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$

charakteristisches Polynom:

$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$

• Eigenvektoren durch einsetzen der λ-Werte

$(A - \lambda E)x = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Interaktive Inhalte:

Matrix

1.6.2 Determinante

Definition

Aus einer quadratischen Matrix kann eine Determinante (Zahlenwert) berechnet werden.

D=det $A = |A|$

Anwendung der Determinante:

- Lineare Gleichungssysteme
- Volumenberechnung im R3
- Flächenberechnungen im R2
- Spatprodukt
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren - inverse Matrix

2-reihige Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$$

3-reihige Determinante

Determinante einer 3×3 Matrix

Methode 1

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$$
$$a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Methode 2 (Regel von Sarrus)

$$\text{D=}\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$$D = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$$
$$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$$

$$D = \det A = |A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 4 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 5 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right.$$

$$D = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$$
$$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 13 & 14 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 14 \cdot 9 = -90$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 27$$

$$D_3 = 11 \cdot 27 - 13 \cdot (-9) + 4 \cdot (-90) = 54$$

$$det(D) = 54$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken hier klicken *Determinante*

1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

$Ax = b \qquad x = A^{-1}b$

A Koeffizientenmatrix

b Spaltenvektor der rechten Seite

x *Lösungsvektor*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inhomogenes Gleichungssystem:

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$

Homogenes Gleichungssystem:

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$

Variablen:x_1,x_2,x_3

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$

$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_m$

oder in der Schreibweise mit den Variablen:x, y, z

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$

$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$

$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$11x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 37$

$12x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 40$

$9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15$

oder

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Gaußsches Eliminationsverfahren

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:
- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Umformen in die Stufenform
- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

Rückwärtseinsetzen
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$
z in die 2. Zeile einsetzen ⇒ y
z und y in die 1. Zeile einsetzen ⇒ x

- Keine Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 12$
$z2s1 = 12 \cdot 11 - 11 \cdot 12 = 0$
$z2s2 = 14 \cdot 11 - 13 \cdot 12 = -2$
$z2s3 = 5 \cdot 11 - 4 \cdot 12 = 7$
$z2s4 = 40 \cdot 11 - 37 \cdot 12 = -4$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
9	3	3	15

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 9$
$z3s1 = 9 \cdot 11 - 11 \cdot 9 = 0$
$z3s2 = 3 \cdot 11 - 13 \cdot 9 = -84$
$z3s3 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 = -3$
$z3s4 = 15 \cdot 11 - 37 \cdot 9 = -168$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	−84	−3	−168

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot (-2) - \text{Zeile2} \cdot (-84)$
$z3s2 = (-84) \cdot -2 - (-2) \cdot (-84) = 0$
$z3s3 = (-3) \cdot -2 - 7 \cdot (-84) = 594$
$z3s4 = (-168) \cdot -2 - (-4) \cdot (-84) = 0$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	0	594	0

$z = \frac{0}{594} = 0$
$y \cdot (-2) + 7 \cdot 0 = (-4)$
$y = 2$
$x \cdot 11 + 13 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 37$
$x = 1$
$L = \{1/2/0\}$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Ziel ist das Umformen in die Diagonalenform

- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

$x = \frac{z1s4}{z1s1}$
$y = \frac{z2s4}{z2s3}$
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$

- Keine Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Zeile2 = Zeile2 − Zeile1 $\cdot \frac{12}{11}$
$z2s1 = 12 - 11 \cdot \frac{12}{11} = 0$
$z2s2 = 14 - 13 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{2}{11}$
$z2s3 = 5 - 4 \cdot \frac{12}{11} = \frac{7}{11}$
$z2s4 = 40 - 37 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
9	3	3	15

Zeile3 = Zeile3 − Zeile1 $\cdot \frac{9}{11}$
$z3s1 = 9 - 11 \cdot \frac{9}{11} = 0$
$z3s2 = 3 - 13 \cdot \frac{9}{11} = -7\frac{7}{11}$
$z3s3 = 3 - 4 \cdot \frac{9}{11} = -\frac{3}{11}$
$z3s4 = 15 - 37 \cdot \frac{9}{11} = -15\frac{3}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

Zeile1 = Zeile1 − Zeile2 $\cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}}$
$z1s2 = 13 - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z1s3 = 4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 49\frac{1}{2}$
$z1s4 = 37 - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 11$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

Zeile3 = Zeile3 − Zeile2 $\cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}}$
$z3s2 = -7\frac{7}{11} - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z3s3 = -\frac{3}{11} - \frac{7}{11} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = -27$
$z3s4 = -15\frac{3}{11} - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

Zeile1 = Zeile1 − Zeile3 $\cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27}$
$z1s3 = 49\frac{1}{2} - (-27) \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 0$
$z1s4 = 11 - 0 \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 11$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

Zeile2 = Zeile2 − Zeile3 $\cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27}$
$z2s3 = \frac{7}{11} - (-27) \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = 0$
$z2s4 = -\frac{4}{11} - 0 \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	0	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$x = \frac{11}{11} = 1$
$y = \frac{-\frac{4}{11}}{-\frac{2}{11}} = 2$
$z = \frac{0}{-27} = 0$
$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken | $n - Gleichungen$ | hier klicken

1.7 Finanzmathematik

1.7.1 Zinsrechnung - Jahreszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$

t	Anzahl der Jahre	
K	Kapital	*Euro*
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	*Euro*

$p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ $\quad K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ $\quad t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$

Interaktive Inhalte:

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$ $\quad p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ $\quad K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ $\quad t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$

1.7.2 Zinsrechnung - Tageszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$

t	Anzahl der Tage	
K	Kapital	*Euro*
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	*Euro*

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ $\quad K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ $\quad t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte:

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ $\quad p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ $\quad K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ $\quad t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$

1.7.3 Zinsrechnung - Monatszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$

t	Anzahl der Monate	
K	Kapital	*Euro*
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	*Euro*

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ $\quad K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ $\quad t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte:

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$ $\quad p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ $\quad K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ $\quad t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$

1.7.4 Zinsfaktor

$q = 1 + \frac{p}{100}$

p	Zinssatz	%
q	Zinsfaktor	

$p = (q-1) \cdot 100$

Interaktive Inhalte:

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\quad p = (q-1) \cdot 100$

1.7.5 Zinseszinsformel

$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$

t	Anzahl der Jahre	
p	Zinssatz	%
K_0	Anfangskapital	*Euro*
K_t	Kapital nach t Jahren	*Euro*

$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ $\quad p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ $\quad t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

Interaktive Inhalte:

$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$ $\quad K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ $\quad p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ $\quad t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

1.7.6 Degressive Abschreibung

$$B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$$

t	Anzahl der Jahre	
p	Abschreibungssatz	%
B_0	Anschaffungswert	*Euro*
B_t	Buchwert	*Euro*

$B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ $\quad t = \frac{\ln(B_t)-\ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ $\quad p = (1 - ^t\sqrt{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$

Interaktive Inhalte:

$B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$ $\quad B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ $\quad t = \frac{\ln(B_t)-\ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ $\quad p = (1 - ^t\sqrt{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$

1.7.7 Rentenrechnung

Vorschüssiger Rentenendwert

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

$r = \frac{R_n \cdot (q-1)}{q \cdot (q^n - 1)}$

$n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q-1)}{r \cdot q} + 1]}{ln\ q}$

Nachschüssiger Rentenendwert

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

$r = \frac{R_n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$

$n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q-1)}{r} + 1]}{ln\ q}$

Vorschüssiger Rentenendwert mit Startkapital

Kapitalmehrung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Kapitalminderung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
K_0 - Startkapital
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

Nachschüssiger Rentenendwert mit Startkapital

Kapitalmehrung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Kapitalminderung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
K_0 - Startkapital
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

Rentenendwert - Rentenbarwert

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n}$$

q - Zinsfaktor
n - Anzahl der Jahre
R_0 - Rentenbarwert
R_n - Rentenendwert
$R_n = R_0 \cdot q^n$
$n = \frac{\ln \frac{R_n}{R_0}}{\ln \ q} = \frac{\ln R_n - \ln R_0}{\ln \ q}$

Interaktive Inhalte:

$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$r = \frac{R_n \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)}$ $r = \frac{R_n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$

$n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q - 1)}{r \cdot q} + 1]}{ln \ q}$ $n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q - 1}{r}}{ln \ q}$

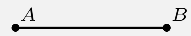
2 Geometrie

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definitionen

Strecke $[AB]$

Gerade Linie die durch 2 Endpunkte begrenzt wird.



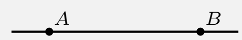
Länge einer Strecke $\overline{AB}$

Entfernung zwischen den Punkten A und B.

$\overline{AB} = 3cm$

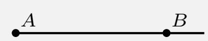
Gerade AB

Unbegrenzte gerade Linie durch 2 Punkte.



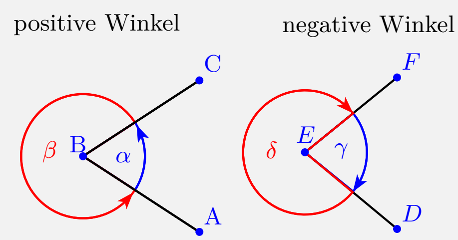
Halbgerade - Strahl $[AB$

Einseitig begrenzte gerade Linie.



Winkel

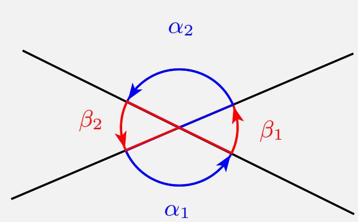
Zwei von einem Punkt (Scheitel) ausgehenden Halbgeraden (Schenkel) schließen einen Winkel ein.
$\alpha = \measuredangle ABC$
Drehsinn entgegen des Uhrzeigersinns = positiver Winkel
Drehsinn im Uhrzeigersinn = negativer Winkel
spitzer Winkel: $0° < \alpha < 90°$
rechter Winkel: $\alpha = 90°$
stumpfer Winkel: $90° < \alpha < 180°$
gestreckter Winkel: $\alpha = 180°$
überstumpfer Winkel: $180° < \alpha < 360°$
Vollwinkel: $\alpha = 360°$



B Scheitelpunkt
$[BA, [BC$ Schenkel
$\alpha = \measuredangle ABC \qquad \beta = \measuredangle CBA$

Winkel an sich schneidenden Geraden

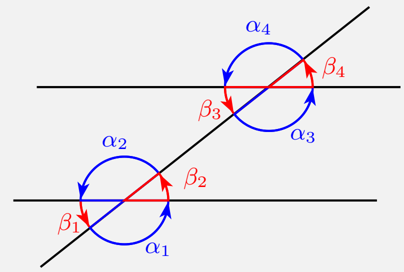
Scheitelwinkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.
Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.



Scheitelwinkel: $\alpha_1 = \alpha_2; \beta_1 = \beta_2$
Nebenwinkel: $\alpha_1 + \beta_1 = 180°; \alpha_2 + \beta_2 = 180°$

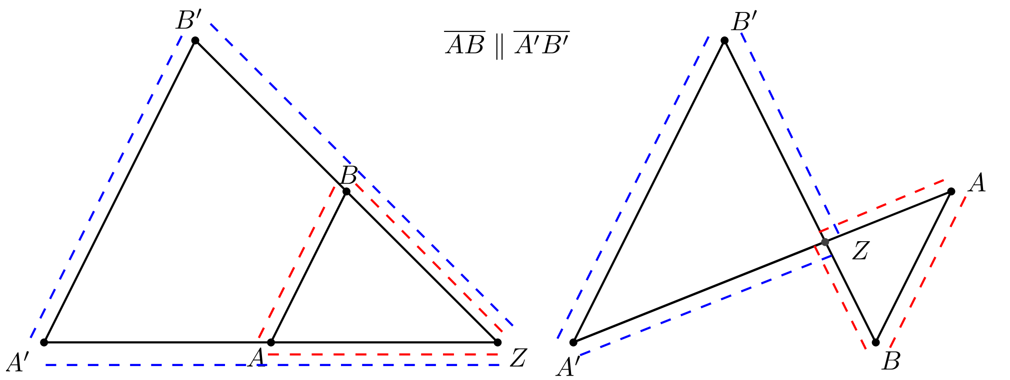
Winkel an parallelen Geraden

Stufenwinkel (F-Winkel) und Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß. Nachbarwinkel (E-Winkel) ergänzen sich zu 180°.



$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$
$\alpha + \beta = 180°$
Stufenwinkel: $\alpha_1 = \alpha_3; \beta_1 = \beta_3$
Wechselwinkel: $\alpha_2 = \alpha_3; \beta_2 = \beta_3$
Nachbarwinkel: $\alpha_3 + \beta_2 = 180°; \alpha_2 + \beta_3 = 180°$

2.1.2 Strahlensatz (Vierstreckensatz)



$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Leftrightarrow$

$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2.2 Dreieck

2.2.1 Eigenschaften des Dreiecks

Winkel- und Seitenbeziehungen

- Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$
- Außenwinkelsumme: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$
- $\gamma' = \alpha + \beta; \beta' = \alpha + \gamma; \alpha' = \beta + \gamma;$
- Dreiecksungleichung:

Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite.

$a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$

- Der längeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber.

$a > b \Rightarrow \alpha > \beta \qquad a < b \Rightarrow \alpha < \beta$

$a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \qquad a < c \Rightarrow \alpha < \gamma$

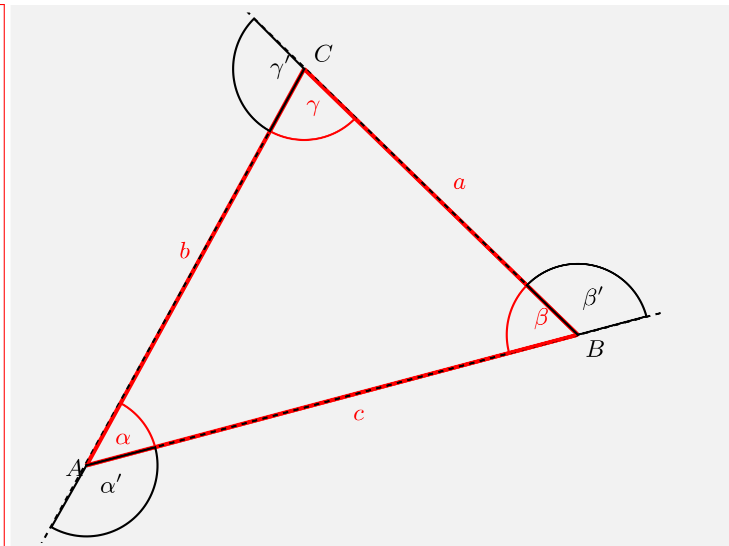
$b > c \Rightarrow \beta > \gamma \qquad b < c \Rightarrow \beta < \gamma$

- Gleichlangen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.

$a = b \Rightarrow \alpha = \beta$

$a = c \Rightarrow \alpha = \gamma$

$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$



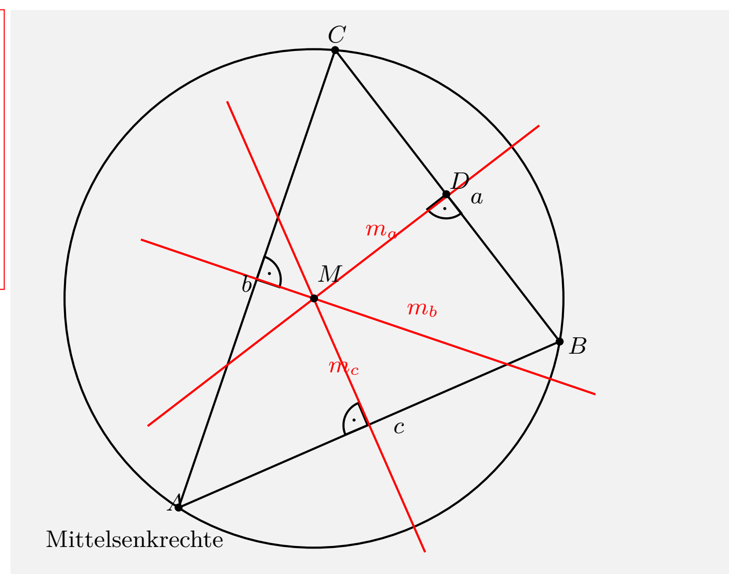
Interaktive Inhalte:
hier klicken

2.2.2 Besondere Linien im Dreieck

Mittelsenkrechte

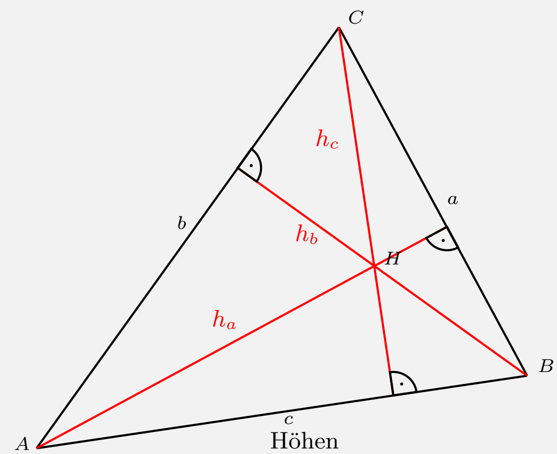
Alle Punkte auf einer Mittelsenkrechte haben von zwei Eckpunkten die gleiche Entfernung. Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt. Der Umkreismittelpunkt hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks die gleiche Entfernung.

Umkreisradius: $r_u = \dfrac{a}{2 \cdot \sin\alpha} = \dfrac{b}{2 \cdot \sin\beta} = \dfrac{c}{2 \cdot \sin\gamma}$



Höhe

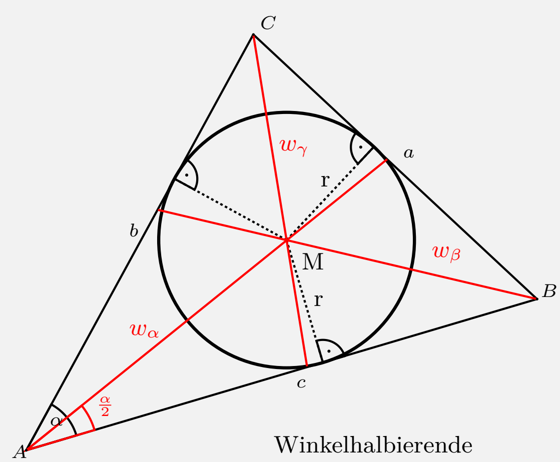
Das Lot von einem Eckpunkt des Dreiecks auf die gegenüberliegende Dreiecksseite. Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt.
Höhen berechnen:
$h_a = c \cdot \sin\beta$
$h_b = a \cdot \sin\gamma$
$h_c = b \cdot \sin\alpha$
Fläche des Dreicks:
$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$
$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$
$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$



Höhen

Winkelhalbierende

Alle Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben zu den Schenkeln den gleichen Abstand. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt. Der Inkreismittelpunkt hat von den drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand.
Inkreisradius:
$\rho = r_i = \dfrac{2 \cdot A}{U} = \dfrac{2 \cdot A}{a+b+c}$
$\delta_1 = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2} \qquad w_\alpha = \dfrac{c \cdot \sin\beta}{\sin\delta_1}$
$\delta_2 = 180° - \frac{\beta}{2} - \gamma \qquad w_\beta = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\delta_2}$
$\delta_3 = 180° - \alpha - \frac{\gamma}{2} \qquad w_\gamma = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\delta_3}$



Winkelhalbierende

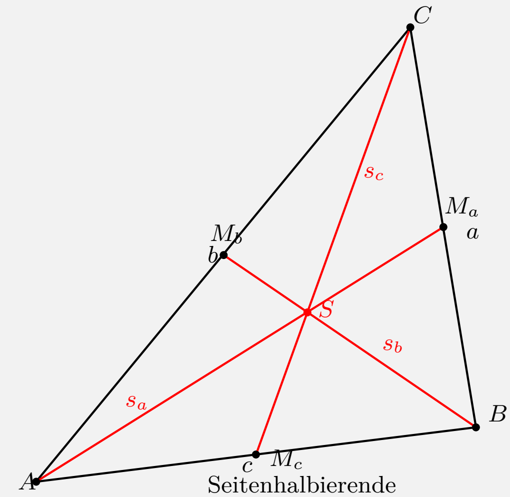
Seitenhalbierende

Strecke vom einem Eckpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

$s_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$

$s_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$

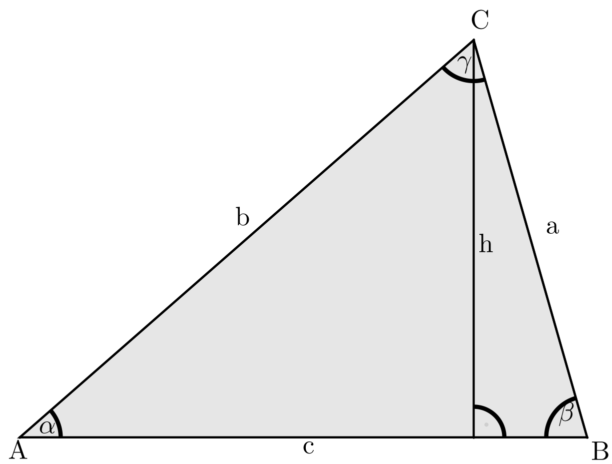
$s_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$



Seitenhalbierende

Interaktive Inhalte:
hier klicken

2.2.3 Allgemeines Dreieck



Eigenschaften

- Innenwinkelsumme: 180°

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Fläche Grundline-Höhe

$A = \frac{g \cdot h}{2}$

g	Grundlinie	m
h	Höhe	m
A	Fläche	m^2

$g = \frac{A \cdot 2}{h}$ $\quad h = \frac{A \cdot 2}{g}$

Fläche-Winkel

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$

b	Länge der Seite	m
a	Länge der Seite	m
γ	Winkel Gamma	$^\circ$
A	Fläche	m^2

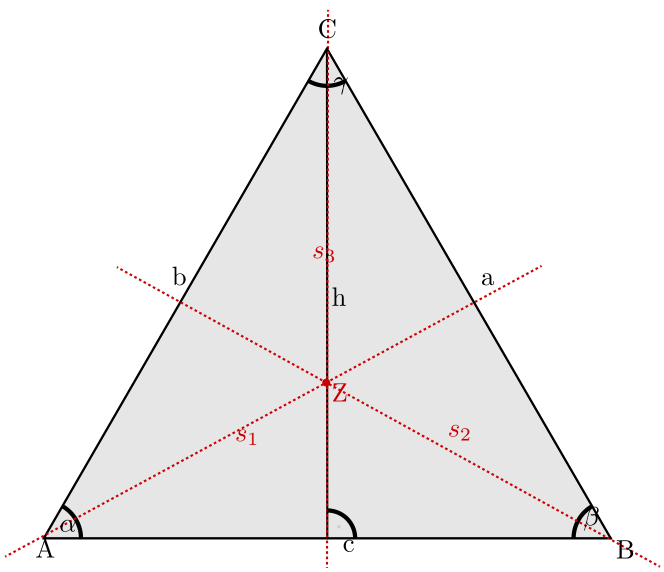
Umfang

$U = a + b + c$

c	Länge der Seite	m
b	Länge der Seite	m
a	Länge der Seite	m
U	Umfang	m

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{g \cdot h}{2}$ $g = \frac{A \cdot 2}{h}$ $h = \frac{A \cdot 2}{g}$ $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$ $U = a + b + c$

2.2.4 Gleichseitiges Dreieck



Eigenschaften

- alle drei Seiten sind gleich lang
- Innenwinkelsumme: 180°
- alle Winkel sind gleich groß: 60°
- drei Symmetrieachsen
- Besonderen Linien im Dreieck fallen zusammen

$a = b = c$
$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$
Symmetrieachsen: s_1, s_2, s_3

Flächeim gleichseitigen Dreieck

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

a	Seite a	m
A	Fläche	m^2

$a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$

Höhe im gleichseitigen Dreieck

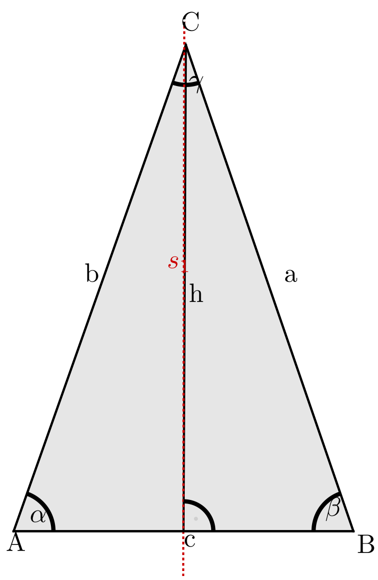
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

h	Höhe	m
a	Grundlinie a	m

$a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ $a = \sqrt{\frac{A \cdot 4}{\sqrt{3}}}$ $h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $a = \frac{h \cdot 2}{\sqrt{3}}$

2.2.5 Gleichschenkliges Dreieck

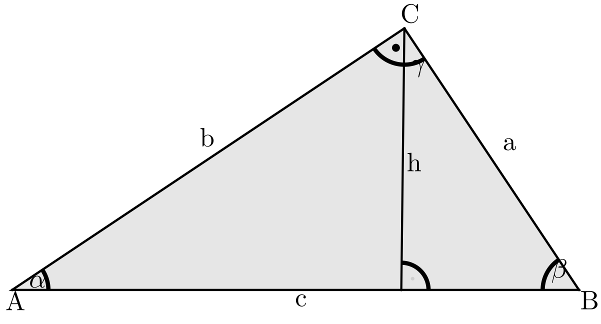


Eigenschaften

- zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel)
- Innenwinkelsumme: 180°
- zwei Winkel sind gleich groß (Basiswinkel)
- eine Symmetrieachse

Schenkel: $a = b$
Basis: c
Basiswinkel: $\alpha = \beta$
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\gamma = 180° - 2 \cdot \alpha$ $\gamma = 180° - 2 \cdot \beta$
$\alpha = \frac{180° - \gamma}{2}$ $\beta = \frac{180° - \gamma}{2}$
Symmetrieachse: s_1

2.2.6 Rechtwinkliges Dreieck



Eigenschaften

- Innenwinkelsumme: 180°
- ein Winkel ist 90°

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\gamma = 90°$

Fläche

$A = \frac{a \cdot b}{2}$

b	Ankathete zu α	m
a	Gegenkathete zu α	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{A \cdot 2}{b}$ $\quad b = \frac{A \cdot 2}{a}$

Phytagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

a	Gegenkathete zu α	m
b	Ankathete zu α	m
c	Hypotenuse	m

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $\quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Höhensatz

$h^2 = p \cdot q$

q	Hypotenusenabschnitt	m
p	Hypotenusenabschnitt	m
h	Höhe	m

$h = \sqrt{p \cdot q}$ $\quad q = \frac{h^2}{p}$ $\quad p = \frac{h^2}{q}$

Kathetensatz

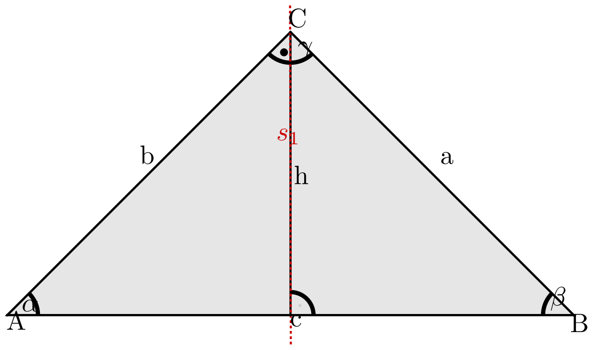
$a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$

p	Hypotenusenabschnitt	m
c	Hypotenuse	m
a	Gegenkathete zu α	m

$a = \sqrt{c \cdot p}$ $\quad c = \frac{a^2}{p}$ $\quad p = \frac{a^2}{c}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a \cdot b}{2}$ | $a = \frac{A \cdot 2}{b}$ | $b = \frac{A \cdot 2}{a}$ | $a^2 + b^2 = c^2$ | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ | $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ | $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ | $h^2 = p \cdot q$ | $h = \sqrt{p \cdot q}$ | $q = \frac{h^2}{p}$ | $p = \frac{h^2}{q}$ | $a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$ | $a = \sqrt{c \cdot p}$ | $c = \frac{a^2}{p}$ | $p = \frac{a^2}{c}$

2.2.7 Gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck



Eigenschaften

- zwei Seiten sind gleich lang (Schenkel)
- Innenwinkelsumme: 180°
- ein Winkel ist 90°
- Innenwinkelsumme: 180°
- zwei Winkel sind 45° (Basiswinkel)
- eine Symmetrieachse

Schenkel: $a = b$
Basis: c
Innenwinkelsumme: 180°
Basiswinkel: $\alpha = \beta = 45°$
Symmetrieachse: s_1

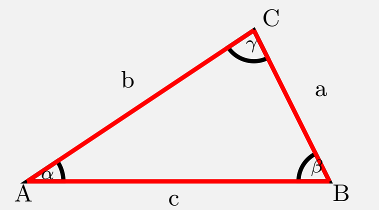
Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a\cdot b}{2}$ $a = \frac{A\cdot 2}{b}$ $b = \frac{A\cdot 2}{a}$ $a^2 + b^2 = c^2$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ $h^2 = p \cdot q$ $h = \sqrt{p \cdot q}$
$q = \frac{h^2}{p}$ $p = \frac{h^2}{q}$ $a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$ $a = \sqrt{c \cdot p}$ $c = \frac{a^2}{p}$ $p = \frac{a^2}{c}$

2.2.8 Kongruenzsätze

Seite - Seite - Seite (SSS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Seite	Seite	Seite
a	b	c

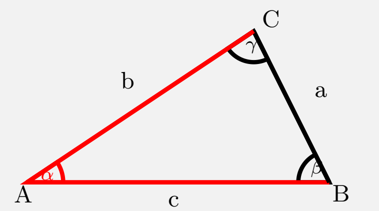


$a = 2,2cm \quad b = 3.6cm \quad c = 4cm$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c



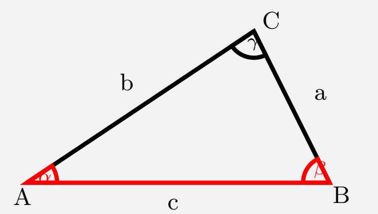
$b = 3.6cm \quad c = 4cm \quad \alpha = 33°$

Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen.

Winkel	Seite	Winkel
α	c	β
α	b	γ
β	a	γ

Winkel	Winkel	Seite
α	β	a
α	β	b
α	γ	a
α	γ	c
β	γ	b
β	γ	c

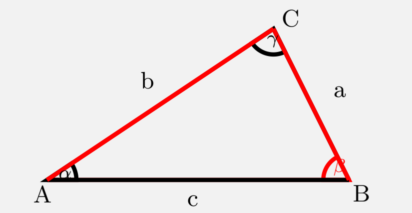


$c = 4cm \quad \alpha = 33° \quad \beta = 63°$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Gegenwinkel) übereinstimmen.

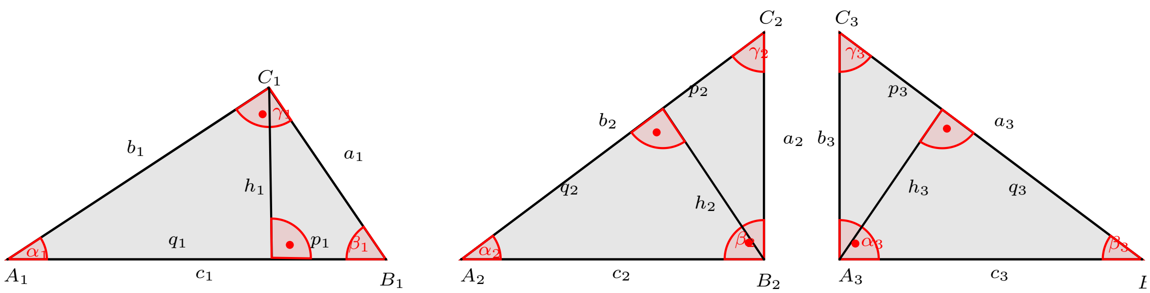
Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b



$a = 2,2cm$ $b = 3,6cm$ $\beta = 63°$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

2.2.9 Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz



Pythagoras

Die Katheten sind die am rechten Winkel anliegenden Seiten. Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.
Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

$\gamma = 90°$ Katheten a und b Hypotenuse c

$a^2 + b^2 = c^2$

$\triangle A_1B_1C_1$

$\gamma_1 = 90^\circ$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1

$a_1^2 + b_1^2 = c_1^2$

$c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ $a_1 = \sqrt{c_1^2 - b_1^2}$ $b_1 = \sqrt{c_1^2 - a_1^2}$

$\triangle A_2B_2C_2$

$\beta_2 = 90°$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2

$a_2^2 + c_2^2 = b_2^2$

$b_2 = \sqrt{a_2^2 + c_2^2}$ $a_2 = \sqrt{b_2^2 - c_2^2}$ $c_2 = \sqrt{b_2^2 - a_2^2}$

$\triangle A_3B_3C_3$

$\alpha_3 = 90°$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3

$a_3^2 + b_3^2 = c_3^2$

$a_3 = \sqrt{b_3^2 + c_3^2}$ $b_3 = \sqrt{a_3^2 - c_3^2}$ $c_3 = \sqrt{a_3^2 - b_3^2}$

Kathetensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.
Die Kathete im Quadrat ist gleich dem Produkt aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse.
$\gamma = 90°$ $\quad c = p + q$
Katheten a und b $\quad$ Hypotenuse c
Hypotenusenabschnitt p und q
$a^2 = c \cdot p$ $\quad b^2 = c \cdot q$

$\triangle A_1B_1C_1$
$\gamma_1 = 90°$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1
Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $\quad c_1 = p_1 + q_1$
$a_1^2 = c_1 \cdot p_1 \quad a_1 = \sqrt{c_1 \cdot p_1} \quad c_1 = \frac{a_1^2}{p_1} \quad p_1 = \frac{a_1^2}{c_1}$
$b_1^2 = c_1 \cdot q_1 \quad b_1 = \sqrt{c_1 \cdot q_1} \quad c_1 = \frac{b_1^2}{q_1} \quad q_1 = \frac{b_1^2}{c_1}$
$\triangle A_2B_2C_2$
$\beta_2 = 90°$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2
Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $\quad b_2 = p_2 + q_2$
$a_2^2 = b_2 \cdot p_2 \quad a_2 = \sqrt{b_2 \cdot p_2} \quad b_2 = \frac{a_2^2}{p_2} \quad p_2 = \frac{a_2^2}{b_2}$
$c_2^2 = b_2 \cdot q_2 \quad c_2 = \sqrt{b_2 \cdot q_2} \quad b_2 = \frac{c_2^2}{q_2} \quad q_2 = \frac{c_2^2}{b_2}$
$\triangle A_3B_3C_3$
$\alpha_3 = 90°$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3
Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $\quad a_3 = p_3 + q_3$
$b_3^2 = a_3 \cdot p_3 \quad b_3 = \sqrt{a_3 \cdot p_3} \quad a_3 = \frac{b_3^2}{p_3} \quad p_3 = \frac{b_3^2}{a_3}$
$c_3^2 = a_3 \cdot q_3 \quad c_3 = \sqrt{a_3 \cdot q_3} \quad a_3 = \frac{c_3^2}{q_3} \quad q_3 = \frac{c_3^2}{a_3}$

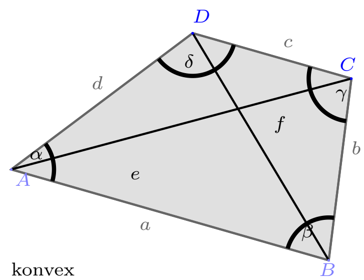
Höhensatz

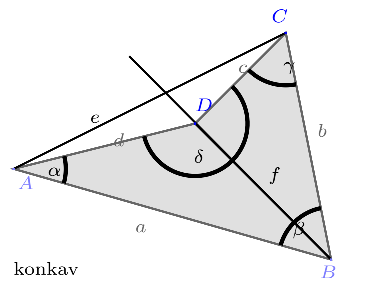
Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.
Die Höhe im Quadrat ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.
$\gamma = 90°$ $\quad c = p + q$
Hypotenusenabschnitte p und q
$h^2 = p \cdot q$

$\triangle A_1B_1C_1$
$\gamma_1 = 90°$ Katheten a_1 und b_1 Hypotenuse c_1
Hypotenusenabschnitte p_1 und q_1 $\quad c_1 = p_1 + q_1$
$h_1^2 = p_1 \cdot q_1 \quad h_1 = \sqrt{p_1 \cdot q_1} \quad p_1 = \frac{h_1^2}{q_1} \quad q_2 = \frac{h_1^2}{p_1}$
$\triangle A_2B_2C_2$
$\beta_2 = 90°$ Katheten a_2 und c_2 Hypotenuse b_2
Hypotenusenabschnitte p_2 und q_2 $\quad b_2 = p_2 + q_2$
$h_2^2 = p_2 \cdot q_2 \quad h_2 = \sqrt{p_2 \cdot q_2} \quad p_2 = \frac{h_2^2}{q_2} \quad q_2 = \frac{h_2^2}{p_2}$
$\triangle A_3B_3C_3$
$\alpha_3 = 90°$ Katheten b_3 und c_3 Hypotenuse a_3
Hypotenusenabschnitte p_3 und q_3 $\quad a_3 = p_3 + q_3$
$h_3^2 = p_3 \cdot q_3 \quad h_3 = \sqrt{p_3 \cdot q_3} \quad p_3 = \frac{h_3^2}{q_3} \quad q_3 = \frac{h_3^2}{p_3}$

2.3 Viereck

2.3.1 Allgemeines Viereck



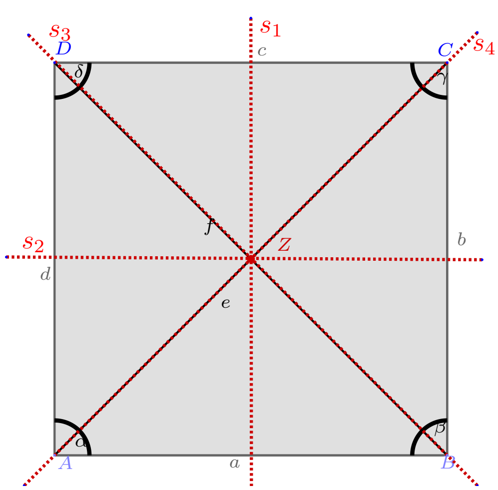


Allgemeines Viereck

• Innenwinkelsumme: 360°
• Konvexes Viereck:
- Diagonalen schneiden sich innerhalb des Vierecks
- alle Winkel sind kleiner als 180°
• Konkaves Viereck:
- Diagonalen schneiden sich außerhalb des Vierecks
- ein Winkel ist größer als 180°

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$
Diagonale: $\overline{AC}=e \quad \overline{BD}=f$

2.3.2 Quadrat



Eigenschaften des Quadrats

- Innenwinkelsumme: 360°
- alle Seiten sind gleich lang
- gegenüberliegende Seiten sind parallel
- alle Innenwinkel sind rechte Winkel
- Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander
- Diagonalen sind senkrecht zueinander
- vier Symmetrieachsen
- Punktsymmetrisch

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a = b = c = d$
$a \| c \quad b \| d$
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$
Diagonale: $d = e = f$
$e \perp f$

Fläche des Quadrats

$A = a^2$

a	Seite	m
A	Fläche	m^2

$a = \sqrt{A}$

Umfang des Quadrats

$U = 4 \cdot a$

a	Seite	m
U	Umfang	m

$a = \frac{U}{4}$

Diagonale des Quadrats

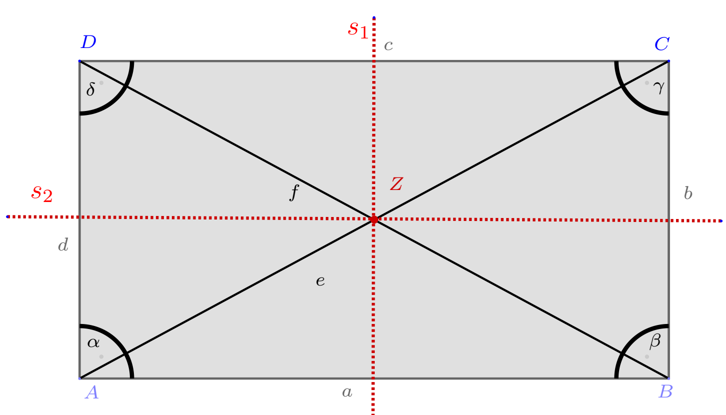
$d = a \cdot \sqrt{2}$

a	Seite	m
d	Diagonale	m

$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

Interaktive Inhalte:
$A = a^2$ $a = \sqrt{A}$ $U = 4 \cdot a$ $a = \frac{U}{4}$ $d = a \cdot \sqrt{2}$ $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$

2.3.3 Rechteck



Eigenschaftgen des Rechtecks

- Innenwinkelsumme: 360°
- gegenüberliegende Seiten sind gleich lang
- gegenüberliegende Seiten sind parallel
- alle Innenwinkel sind rechte Winkel
- Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander
- zwei Symmetrieachsen
- Punktsymmetrisch

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a = c \quad b = d$
$a \| c \quad b \| d$
$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90°$
Diagonale: $d = e = f$
Symmetrieachsen: s_1, s_2
Punktsymmetrisch zu Z

Fläche des Rechtecks

$A = a \cdot b$

b	Breite	m
a	Länge	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{A}{b} \qquad b = \frac{A}{a}$

Umfang des Rechtecks

$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

b	Breite	m
a	Länge	m
U	Umfang	m

$a = \frac{U-2\cdot b}{2} \qquad b = \frac{U-2\cdot a}{2}$

Diagonalen des Rechtecks

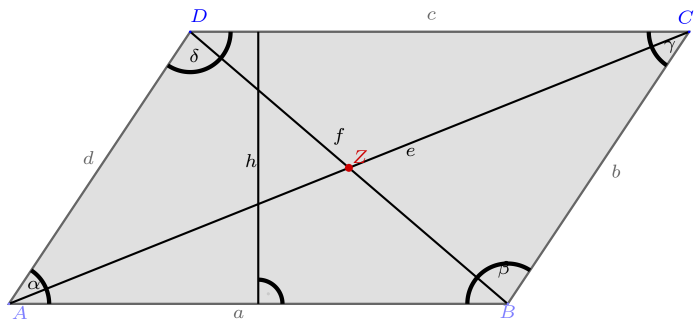
$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

b	Breite	m
a	Länge	m
d	Diagonale	m

$b = \sqrt{d^2 - a^2} \qquad a = \sqrt{d^2 - b^2}$

Interaktive Inhalte:
$A = a \cdot b$ $a = \frac{A}{b}$ $b = \frac{A}{a}$ $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ $a = \frac{U-2\cdot b}{2}$ $b = \frac{U-2\cdot a}{2}$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ $b = \sqrt{d^2 - a^2}$ $a = \sqrt{d^2 - b^2}$

2.3.4 Parallelogramm



Eigenschaften des Parallelogramms

- Innenwinkelsumme: 360°
- gegenüberliegende Seiten sind gleich lang
- gegenüberliegende Seiten sind parallel
- gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- Nachbarwinkel ergeben zusammen 180°
- Diagonalen halbieren einander
- Punktsymmetrie

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a = c \quad b = d$
$a \| c \quad b \| d$
$\alpha + \delta = 180° \quad \gamma + \beta = 180°$
$\alpha = \gamma \quad \beta = \delta$
Punktsymmetrisch zu Z

Fläche des Parallelogramms

$A = g \cdot h$

h	Höhe	m
g	Grundlinie	m
A	Fläche	m^2

$g = \frac{A}{h} \quad h = \frac{A}{g}$

Umfang des Parallelogramms

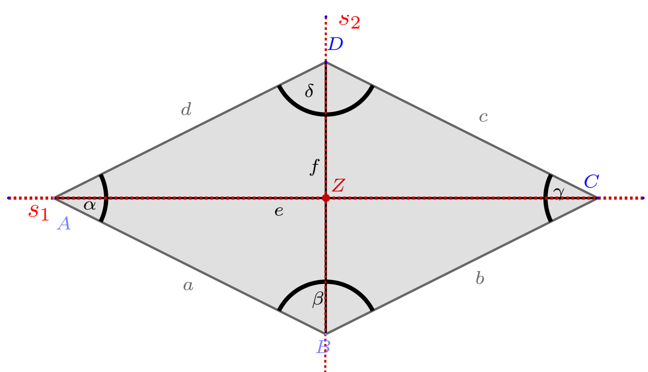
$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$

b	Breite	m
a	Länge	m
U	Umfang	m

$a = \frac{U - 2 \cdot b}{2} \quad b = \frac{U - 2 \cdot a}{2}$

Interaktive Inhalte:
$A = g \cdot h$ $g = \frac{A}{h}$ $h = \frac{A}{g}$

2.3.5 Raute



Raute (Rhombus)

- Innenwinkelsumme: 360°
- alle Seiten sind gleich lang
- gegenüberliegende Seiten sind parallel
- gegenüberliegende Winkel sind gleich groß
- Nachbarwinkel ergeben zusammen 180°
- Diagonalen sind senkrecht zueinander
- Diagonalen halbieren einander
- zwei Symmetrieachsen
- Punktsymmetrisch

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a = c = b = d$
$a \| c \quad b \| d$
$\alpha + \delta = 180° \quad \gamma + \beta = 180°$
$\alpha = \gamma \quad \beta = \delta$
Symmetrieachsen: s_1, s_2
Punktsymmetrisch zu Z

Fläche der Raute

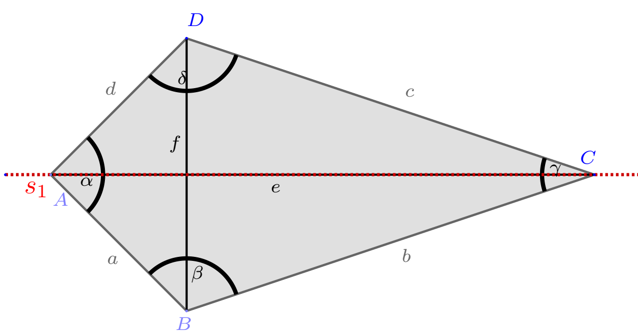
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

f	Diagonale f	m
e	Diagonale e	m
A	Fläche	m^2

$e = \frac{2 \cdot A}{f} \qquad f = \frac{2 \cdot A}{e}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $f = \frac{2 \cdot A}{e}$

2.3.6 Drachen



Fläche des Drachenvierecks

- Innenwinkelsumme: 360°
- zwei Paar benachbarter Seiten sind gleich lang
- zwei Winkel sind gleich
- eine Diagonale halbiert die andere
- eine Symmetrieachse

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a = d \quad b = c$
$a \| c \quad b \| d$
$\beta = \delta$
Symmetrieachse: s_1

Fläche der Raute

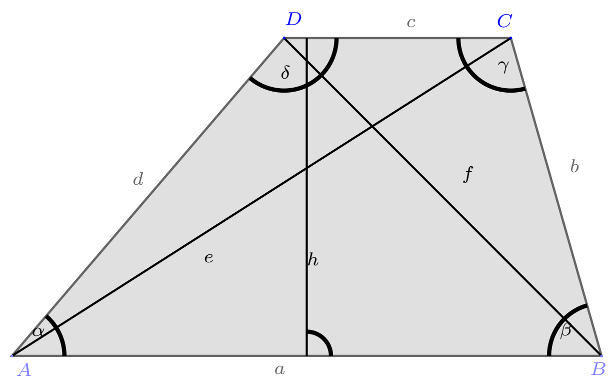
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$

f	Diagonale f	m
e	Diagonale e	m
A	Fläche	m^2

$e = \frac{2 \cdot A}{f} \qquad f = \frac{2 \cdot A}{e}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ $e = \frac{2 \cdot A}{f}$ $f = \frac{2 \cdot A}{e}$

2.3.7 Allgemeines Trapez



Eigenschaften des Allgemeinen Trapezes

- Innenwinkelsumme: 360°
- zwei Seiten sind parallel
- Nachbarwinkel ergeben jeweils zusammen 180°

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a \| c$
$\alpha + \delta = 180°$ $\gamma + \beta = 180°$

Flächeninhalt Trapez

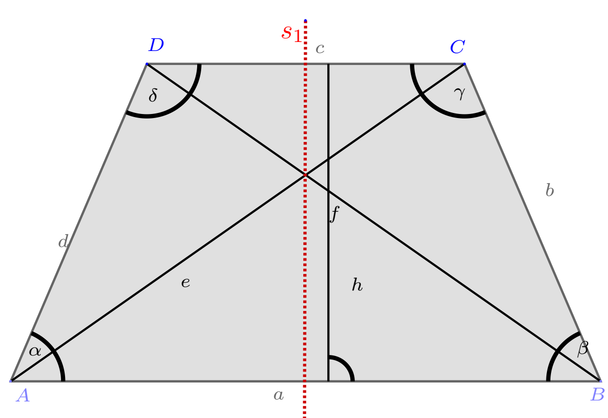
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

c	Grundlinie c	m
a	Grundlinie a	m
h	Höhe	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ $c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ $h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ $a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ $c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ $h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$

2.3.8 Gleichschenkliges Trapez



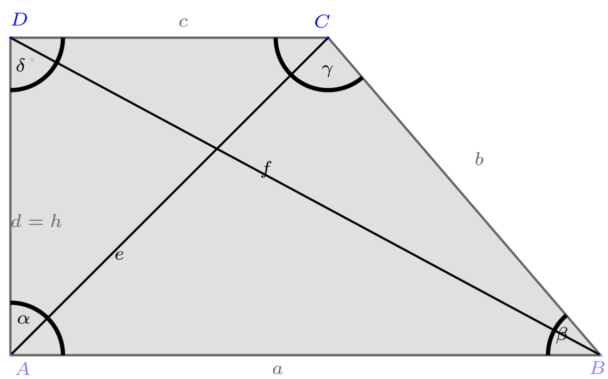
Eigenschaften Gleichschenkliges Trapez

- Innenwinkelsumme: 360°
- zwei Seiten sind parallel
- zwei Seiten sind gleich lang
- je zwei Winkel sind gleich groß
- eine Symmetrieachse
- Diagonalen sind gleich lang
- eine Symmetrieachse

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$
$a \| c$
$d = b$
$\alpha + \delta = 180° \quad \gamma + \beta = 180°$
$\alpha = \beta \quad \gamma = \delta$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ | $a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ | $c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ | $h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$

2.3.9 Rechtwinkliges Trapez



$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

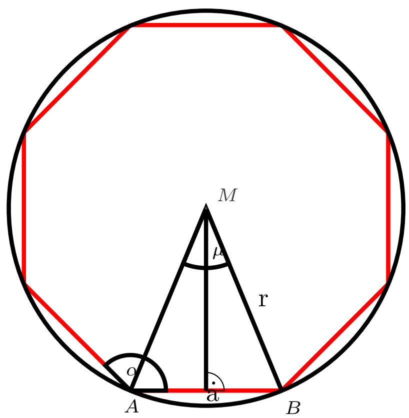
c	Grundlinie c	m
a	Grundlinie a	m
h	Höhe	m
A	Fläche	m^2

$a = \frac{2 \cdot A}{h} - c \quad c = \frac{2 \cdot A}{h} - a \quad h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ | $a = \frac{2 \cdot A}{h} - c$ | $c = \frac{2 \cdot A}{h} - a$ | $h = \frac{2 \cdot A}{a+c}$

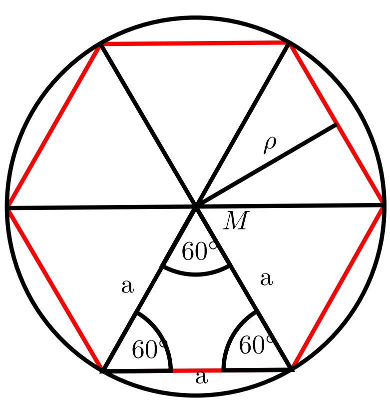
2.4 Polygone (n-Ecken)

2.4.1 Regelmäßiges n-Eck



Seitenlänge n-Eck: $a = 2 \cdot r \sin \frac{\mu}{2}$
Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360°}{n}$
Innenwinkel: $\alpha = 180° - \mu$
Fläche: $A = n \cdot A_D = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \mu$

2.4.2 Sechseck



Seitenlänge 6-Eck: $a = r$
Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360°}{6} = 60°$
Innenwinkel: $\alpha = 180° - 60° = 120°$

$A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$

a	Grundlinie a	m
A	Fläche	m^2

$a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$

$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

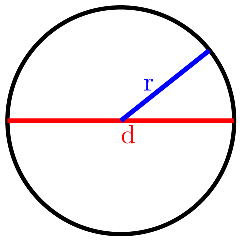
ρ	Inkreisradius	m
a	Grundlinie a	m

$a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte:
$A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$ $a = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{3}}}$ $\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ $a = \frac{\rho \cdot 2}{\sqrt{3}}$

2.5 Kreis

2.5.1 Kreis



$d = 2 \cdot r$

r	Radius	m
d	Durchmesser	m

$r = \frac{d}{2}$

$A = r^2 \cdot \pi$

π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
A	Fläche	m^2	

$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$U = 2 \cdot r \cdot \pi$

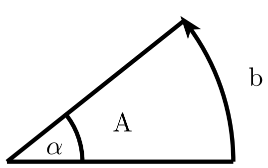
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
U	Umfang	m	

$r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte:

$d = 2 \cdot r$ $r = \frac{d}{2}$ $A = r^2 \cdot \pi$ $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ $U = 2 \cdot r \cdot \pi$ $r = \frac{U}{2 \cdot \pi}$

2.5.2 Kreissektor (Grad)



$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

α	Winkel	$^\circ$	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
A	Fläche	m^2	

$r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$

$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$

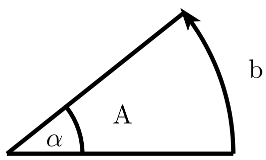
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
α	Winkel	$^\circ$	
b	Kreisbogen	m	

$r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$

Interaktive Inhalte:

$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ | $r = \sqrt{\frac{A \cdot 360}{\alpha \cdot \pi}}$ | $\alpha = \frac{A \cdot 360}{r^2 \cdot \pi}$ | $b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$ | $r = \frac{b \cdot 360}{\alpha \cdot \pi \cdot 2}$ | $\alpha = \frac{b \cdot 360}{r \cdot \pi \cdot 2}$

2.5.3 Kreissektor (Bogenmaß)



$$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$$

x	Winkel x	rad
r	Radius	m
A	Fläche	m^2

$r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ $\quad x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$

$$b = r \cdot x$$

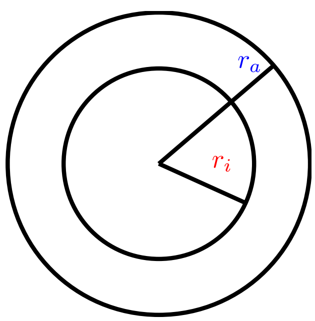
r	Radius	m
x	Winkel x	rad
b	Kreisbogen	m

$r = \frac{b}{x}$ $\quad x = \frac{b}{r}$

Interaktive Inhalte:

$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$ | $r = \sqrt{\frac{A \cdot 2}{x}}$ | $x = \frac{A \cdot 2}{r^2}$ | $b = r \cdot x$ | $r = \frac{b}{x}$ | $x = \frac{b}{r}$ | hier klicken

2.5.4 Kreisring



$$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$$

π	Kreiszahl	$3,1415927$
r_a	Radius (äußerer Kreis)	m
r_i	Radius (innerer Kreis)	m
A	Fläche	m^2

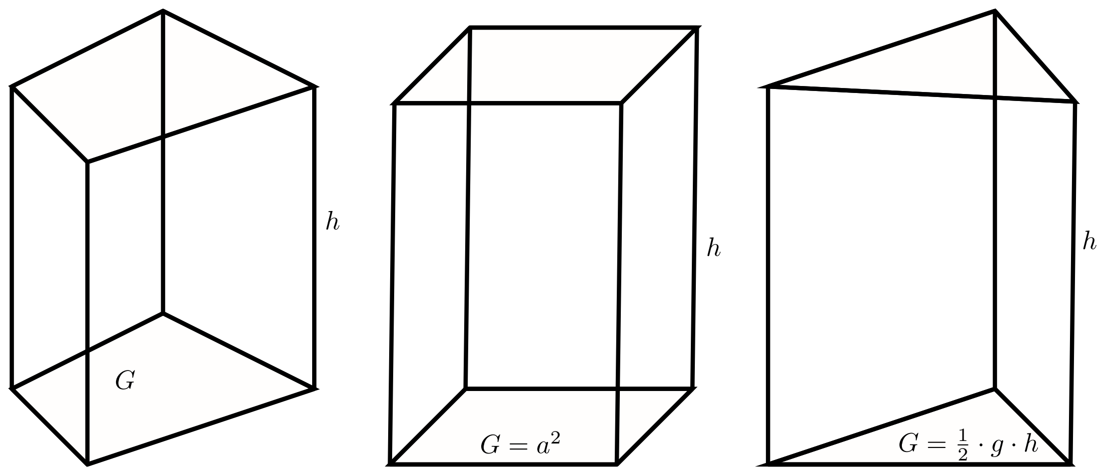
$r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ $\quad r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$

Interaktive Inhalte:

$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$ | $r_a = \sqrt{\frac{A}{\pi} + r_i^2}$ | $r_i = \sqrt{r_a^2 - \frac{A}{\pi}}$

2.6 Stereometrie

2.6.1 Prisma

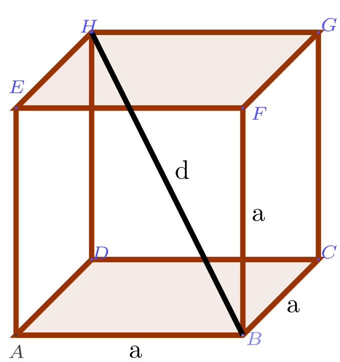


Quadratisches Prisma Dreiseitiges Prisma

$V = G \cdot h$	h Körperhöhe m G Grundfläche m^2 V Volumen m^3 $G = \frac{V}{h}$ $h = \frac{V}{G}$
$O = 2 \cdot G + M$	M Mantelfläche m^2 G Grundfläche m^2 O Oberfläche m^2 $G = \frac{O-M}{2}$ $M = O - 2 \cdot G$

Interaktive Inhalte:
$V = G \cdot h$ $G = \frac{V}{h}$ $h = \frac{V}{G}$ $O = 2 \cdot G + M$ $G = \frac{O-M}{2}$ $M = O - 2 \cdot G$

2.6.2 Würfel



$V = a^3$

a	Seite	m
V	Volumen	m^3

$a =^3 \sqrt{V}$

$O = 6 \cdot a^2$

a	Seite	m
O	Oberfläche	m^2

$a = \sqrt{\frac{O}{6}}$

$d = a \cdot \sqrt{3}$

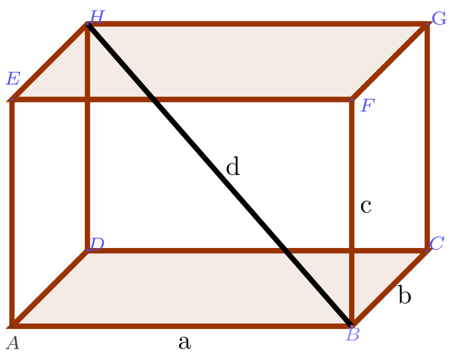
a	Seite	m
d	Raumdiagonale	m

$a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

Interaktive Inhalte:

$V = a^3$ $a =^3 \sqrt{V}$ $O = 6 \cdot a^2$ $a = \sqrt{\frac{O}{6}}$ $d = a \cdot \sqrt{3}$ $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$

2.6.3 Quader



$V = a \cdot b \cdot c$

c	Höhe	m
b	Breite	m
a	Länge	m
V	Volumen	m^3

$a = \frac{V}{b \cdot c}$ $b = \frac{V}{a \cdot c}$ $c = \frac{V}{b \cdot a}$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

c	Höhe	m
b	Breite	m
a	Länge	m
O	Oberfläche	m^2

$a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b+c)}$ $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a+c)}$ $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b+a)}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

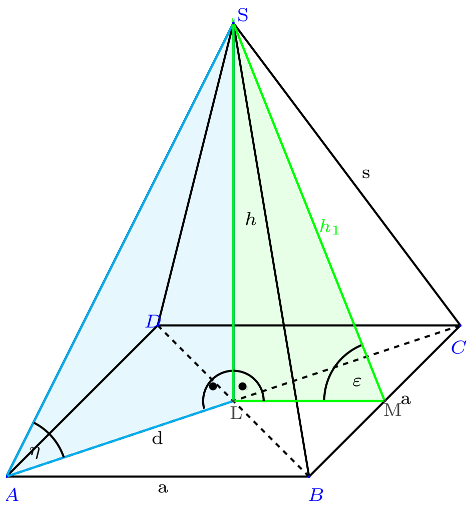
c	Höhe	m
b	Breite	m
a	Länge	m
d	Raumdiagonale	m

$a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ $c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$

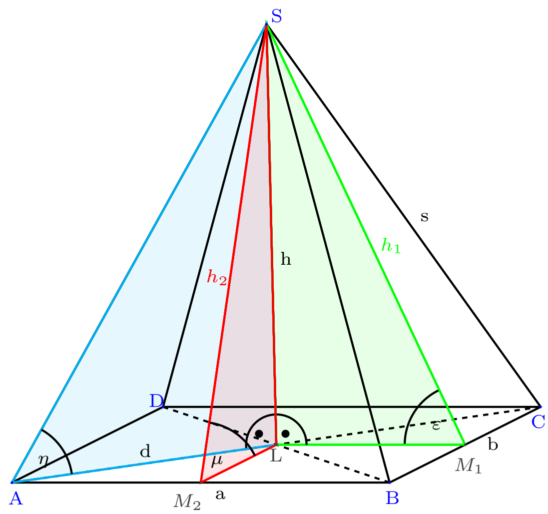
Interaktive Inhalte:

$V = a \cdot b \cdot c$ $a = \frac{V}{b \cdot c}$ $b = \frac{V}{a \cdot c}$ $c = \frac{V}{b \cdot a}$ $O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ $a = \frac{O - 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot (b+c)}$ $b = \frac{O - 2 \cdot a \cdot c}{2 \cdot (a+c)}$ $c = \frac{O - 2 \cdot b \cdot a}{2 \cdot (b+a)}$ $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ $a = \sqrt{d^2 - b^2 - c^2}$ $b = \sqrt{d^2 - a^2 - c^2}$ $c = \sqrt{d^2 - b^2 - a^2}$

2.6.4 Pyramide



Quadratische Grundfläche



Rechteckige Grundfläche

Volumen

$V = \frac{1}{3}G \cdot h$

Körperhöhe	h	m	Meter
Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Volumen	V	m^3	Kubikmeter

$G = \frac{3 \cdot V}{h}$ $\quad h = \frac{3 \cdot V}{G}$

Oberfläche

$O = G + M$

Grundfläche	G	m^2	Quadratmeter
Mantelfläche	M	m^2	Quadratmeter
Oberfläche	O	m^2	Quadratmeter

$G = O - M$ $\quad M = O - G$

Quadratische Pyramide

Pythagoras im $\triangle ABC$ $d^2 = a^2 + a^2$ $d = a\sqrt{2}$

Pythagoras im $\triangle LMS$ $h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Mantelfläche $M = 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_1$

Grundfläche $G = a^2$

Oberfläche $O = G + M$

Volumen $V = \frac{1}{3}G \cdot h$ $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$\measuredangle CAS$ $\tan\eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$\measuredangle SML$ $\tan\epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

Pythagoras im $\triangle$ ABC $d = \sqrt{a^2 + a^2}$

$d = \sqrt{(3m)^2 + (3m)^2} = 4,24m$

Pythagoras im $\triangle$ LM_1S $h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$

Pythagoras im $\triangle$ ALS $s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$s = \sqrt{\left(\frac{4,24m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,43m$

Mantelfläche $M = 4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h_1$

$M = 4 \cdot \frac{1}{2}3m \cdot 5,22m = 31,3m^2$

Grundfläche $G = a^2$

$G = (3m)^2 = 9m^2$

Oberfläche $O = G + M$

$O = 9m^2 + 31,3m^2 = 40,3m^3$

Volumen $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$

$V = \frac{1}{3}(3m)^2 \cdot 5m = 15m^3$

$\measuredangle CAS$ $\tan\eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

$\tan\eta = \frac{5m}{\frac{1}{2}4,24m}$

$\eta = 67°$

$\measuredangle SM_1L$ $\tan\epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

$\tan\epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2}3m}$

$\epsilon = 73,3°$

Rechteckige Pyramide

Pythagoras im $\triangle ABC$ $d^2 = a^2 + b^2$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle LM_2S$ $h_2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

Mantelfläche: $M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$

Grundfläche: $G = a \cdot b$

Oberfläche: $O = G + M$

Volumen: $V = \frac{1}{3} G \cdot h$ $V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$\measuredangle CAS$ $\tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$\measuredangle SM_1L$ $\tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle ABC$ und der Grundfläche

$\measuredangle SM_2L$ $\tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$

Pythagoras im $\triangle ABC$ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d = \sqrt{(3m)^2 + (4m)^2} = 5m$

Pythagoras im $\triangle LM_1S$ $h_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_1 = \sqrt{\left(\frac{3m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,22m$

Pythagoras im $\triangle LM_2S$ $h_2 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2}$

$h_2 = \sqrt{\left(\frac{4m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,39m$

Pythagoras im $\triangle ALS$ $s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}$

$s = \sqrt{\left(\frac{5m}{2}\right)^2 + (5m)^2} = 5,59m$

Mantelfläche: $M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$

$M = 2 \cdot \frac{1}{2} 3m \cdot 5,39m + 2 \cdot \frac{1}{2} 4m \cdot 5,22m = 37m^2$

Grundfläche: $G = a \cdot b$

$G = 3m \cdot 4m = 12m^2$

Oberfläche: $O = G + M$

$O = 12m^2 + 37m^2 = 49m^3$

Volumen: $V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$

$V = \frac{1}{3} 3m \cdot 4m \cdot 5m = 20m^3$

$\measuredangle CAS$ $\tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$

$\tan \eta = \frac{5m}{\frac{1}{2}5m}$

$\eta = 63,4^\circ$

$\measuredangle SM_1L$ $\tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$

$\tan \epsilon = \frac{5m}{\frac{1}{2}3m}$

$\epsilon = 73,3^\circ$

$\measuredangle SM_2L$ $\tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$

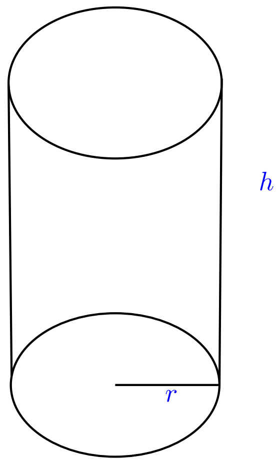
$\tan \mu = \frac{5m}{\frac{1}{2}4m}$

$\mu = 68,2^\circ$

Interaktive Inhalte:

$V = \frac{1}{3} G \cdot h$ | $G = \frac{3 \cdot V}{h}$ | $h = \frac{3 \cdot V}{G}$ | $O = G + M$ | $G = O - M$ | $M = O - G$ | Rechteckige Pyramide | Quadratische

2.6.5 Kreiszylinder



$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	

$r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ $h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$

$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$

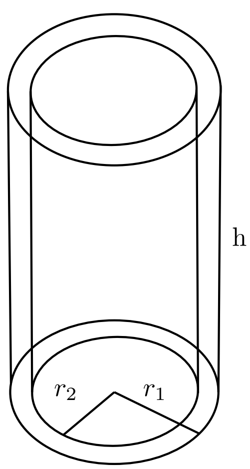
h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
O	Oberfläche	m^2	

$r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ $h = \frac{0 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$ $r = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h}}$ $h = \frac{V}{r^2 \cdot \pi}$ $O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$ $r = 0,5 \cdot (-h + \sqrt{h^2 + \frac{O}{\pi}})$ $h = \frac{0 - 2 \cdot \pi \cdot r^2}{2 \cdot r \cdot \pi}$

2.6.6 Hohlzylinder



$V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$

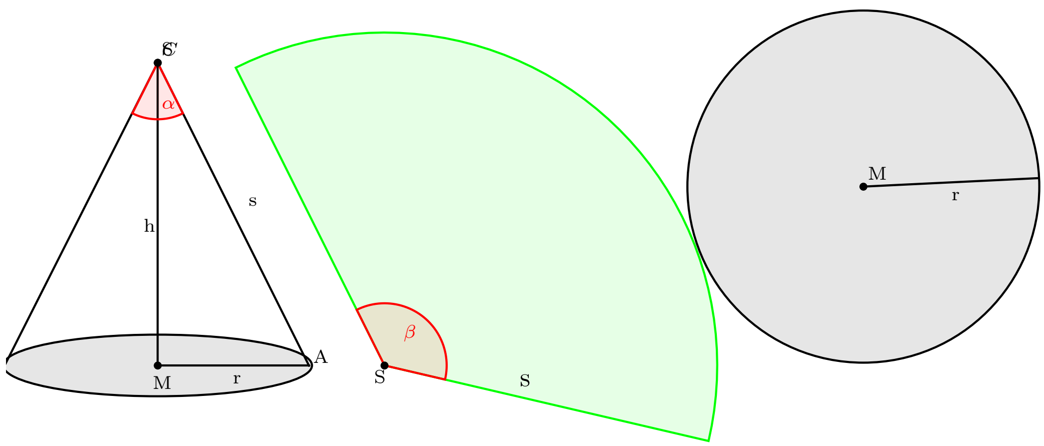
h	Körperhöhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r_2	Radius 2	m	
r_1	Radius 1	m	
V	Volumen	m^3	

$r_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h} + r_2^2}$ $\quad r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{V}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi}$

Interaktive Inhalte:

$V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$ $\quad r_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot h} + r_2^2}$ $\quad r_2 = \sqrt{r_1^2 - \frac{V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{V}{(r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi}$

2.6.7 Kreiskegel



$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$

h	Höhe	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	

$r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi}$

$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$

s	Mantellinie	m	
r	Radius	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
O	Oberfläche	m^2	

$s = \frac{O}{r \cdot \pi} - r$ $\quad r = \frac{-\pi \cdot s + \sqrt{(\pi \cdot s)^2 + 4 \cdot \pi \cdot O}}{2 \cdot \pi}$

$M = r \cdot \pi \cdot s$

s	Mantellinie	m	
r	Radius	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
M	Mantelfläche	m^2	

$s = \frac{M}{r \cdot \pi}$ $\quad r = \frac{M}{s \cdot \pi}$

$s = \sqrt{h^2 + r^2}$

s	Mantellinie	m
r	Radius	m
h	Höhe	m

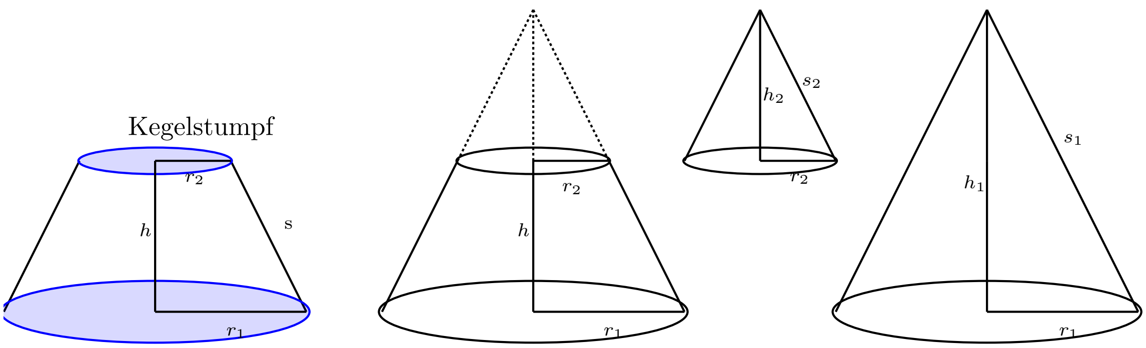
$r = \sqrt{s^2 - h^2}$ $\quad h = \sqrt{s^2 - r^2}$

Interaktive Inhalte:

$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$ $\quad r = \sqrt{\frac{3 \cdot V}{\pi \cdot h}}$ $\quad h = \frac{3 \cdot V}{r^2 \cdot \pi}$ $\quad O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$ $\quad s = \frac{O}{r \cdot \pi} - r$ $\quad r = \frac{-\pi \cdot s + \sqrt{(\pi \cdot s)^2 + 4 \cdot \pi \cdot O}}{2 \cdot \pi}$ $\quad M = r \cdot \pi \cdot s$

$s=\frac{M}{r\cdot\pi}$ | $r=\frac{M}{s\cdot\pi}$ | $s=\sqrt{h^2+r^2}$ | $r=\sqrt{s^2-h^2}$ | $h=\sqrt{s^2-r^2}$

2.6.8 Kegelstumpf



Kegelstumpf

Strahlensatz

$\frac{h_2}{h_1}=\frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_1}=\frac{r_2}{r_1}$
$h_1=h_2+h$	$s_1=s_2+s$
$\frac{h_2}{h_2+h}=\frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_2+s}=\frac{r_2}{r_1}$
$h_2\cdot r_1=r_2\cdot(h_2+h)$	$s_2\cdot r_1=r_2\cdot(s_2+s)$
$h_2\cdot r_1=r_2\cdot h_2+r_2\cdot h$	$s_2\cdot r_1=r_2\cdot s_2+r_2\cdot s$
$h_2\cdot r_1-r_2\cdot h_2=r_2\cdot h$	$s_2\cdot r_1-r_2\cdot s_2=r_2\cdot s$
$h_2\cdot(r_1-r_2)=r_2\cdot h$	$s_2\cdot(r_1-r_2)=r_2\cdot s$
$h_2=\frac{r_2\cdot h}{r_1-r_2}$	$s_2=\frac{r_2\cdot s}{r_1-r_2}$
$h_1=h_2+h$	$s_1=s_2+s$

Pythagoras:

$s_2^2=r_2^2+h_2^2 \quad s_1^2=r_1^2+h_1^2$

Mantelfläche: $M=r_1\cdot\pi\cdot s_1-r_2\cdot\pi\cdot s_2$

Grund- und Deckfläche: $G=r_1^2\pi \quad D=r_2^2\pi$

Oberfläche: $O=G+D+M$

Volumen: $V=\frac{1}{3}r_1^2\cdot\pi\cdot h_1-\frac{1}{3}r_2^2\cdot\pi\cdot h_2$

$h=5m$
$\pi=3,14$
$r_2=3m$
$r_1=4m$
$h_2=\frac{r_2\cdot h}{r_1-r_2}$
$h_2=\frac{3m\cdot 5m}{4m-3m}=15m$
$h_1=h_2+h$
$h_1=15m+5m$
Pythagoras:
$s_2=\sqrt{r_2^2+h_2^2} \quad s_1=\sqrt{r_1^2+h_1^2}$
$s_2=\sqrt{(3m)^2+(15m)^2}=15,3m$
$s_1=\sqrt{(4m)^2+(20m)^2}=20,4m$
Mantelfläche: $M=r_1\cdot\pi\cdot s_1-r_2\cdot\pi\cdot s_2$
$M=4m\cdot\pi\cdot 20,4m-3m\cdot\pi\cdot 15,3m=112m^2$
Grund- und Deckfläche: $G=r_1^2\pi \quad D=r_2^2\pi$
$G=(4m)^2\pi=50,3m^2$
$D=(3m)^2\pi=28,3m^2$
Oberfläche: $O=G+D+M$
$O=50,3m^2+28,3m^2+112m^2=191m^2$
Volumen: $V=\frac{1}{3}r_1^2\cdot\pi\cdot h_1-\frac{1}{3}r_2^2\cdot\pi\cdot h_2$
$V=\frac{1}{3}4m^2\cdot\pi\cdot 20m-\frac{1}{3}3m^2\cdot\pi\cdot 15m=194m^3$

Interaktive Inhalte:
Kegelstumpf

2.6.9 Kugel

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$

π	Kreiszahl		$3,1415927$
r	Radius	m	
V	Volumen	m^3	

$r =^3 \sqrt{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$

$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$

r	Radius	m	
π	Kreiszahl		$3,1415927$
O	Oberfläche	m^2	

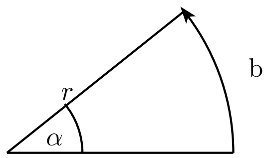
$r = \sqrt{\frac{O}{\pi \cdot 4}}$

Interaktive Inhalte:

$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$ $r =^3 \sqrt{\frac{V \cdot 3}{4 \cdot \pi}}$ $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ $r = \sqrt{\frac{O}{\pi \cdot 4}}$

2.7 Trigonometrie

2.7.1 Gradmaß - Bogenmaß



$\alpha(^\circ)$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\alpha(rad)$	0 0	$\frac{1}{6}\pi$ $0,5236$	$\frac{1}{4}\pi$ $0,7854$	$\frac{1}{3}\pi$ $1,0472$	$\frac{1}{2}\pi$ $1,5708$	$\frac{2}{3}\pi$ $2,0944$	$\frac{3}{4}\pi$ $2,3562$	$\frac{5}{6}\pi$ $2,618$	π $3,1416$

$\alpha(^\circ)$	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\alpha(rad)$	$\frac{7}{6}\pi$ $3,6652$	$\frac{5}{4}\pi$ $3,927$	$\frac{4}{3}\pi$ $4,1888$	$\frac{3}{2}\pi$ $4,7124$	$\frac{5}{3}\pi$ $5,236$	$\frac{7}{4}\pi$ $5,4978$	$\frac{11}{6}\pi$ $5,7596$	2π $6,2832$

Definition Bogenmaß

Das Bogenmaß des Winkels x (RAD), ist die Länge des Kreisbogens b durch Radius r.

$x = \frac{b}{r}$

Beim Radius r=1 (Einheitskreis), ist das Bogenmaß des Winkels x (RAD) die Länge des Kreisbogens b.

$x = b$

Kreisbogen:$b = 3cm$ Radius:$r = 2cm$

$x = \frac{b}{r}$

$x = \frac{3cm}{2cm}$

$x = 1,5rad$

Umrechnung Gradmaß (DEG) - Bogenmaß (RAD)

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$

$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$

Kreiszahl π

α in Gradmaß $[^\circ]$ (DEG)

x in Bogemaß $[rad]$ (RAD)

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$

$\pi = 3,14$

$x = 1,57rad$

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot 1,57rad$

$\alpha = 90^\circ$

$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$

$\pi = 3,14$

$\alpha = 90^\circ$

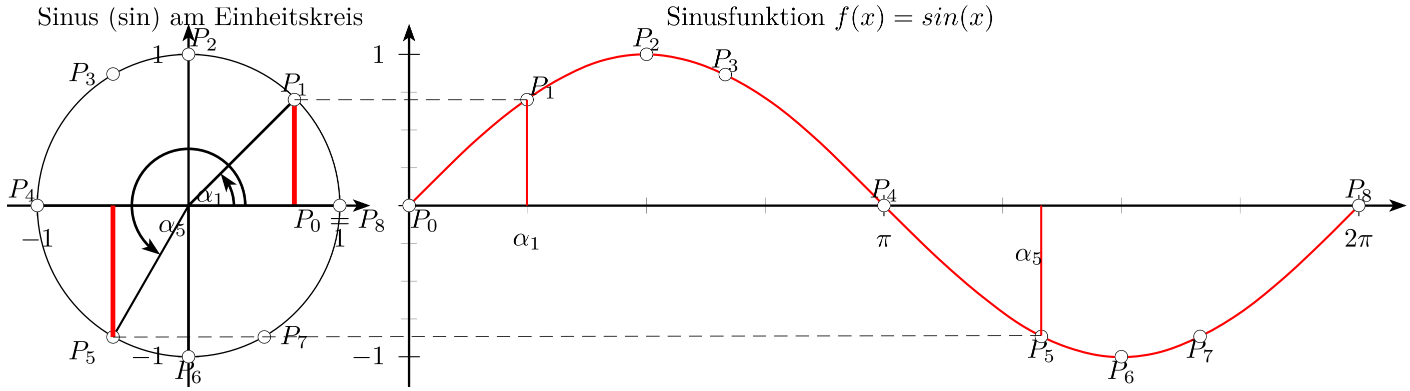
$x = \frac{3,14}{180} \cdot 90^\circ$

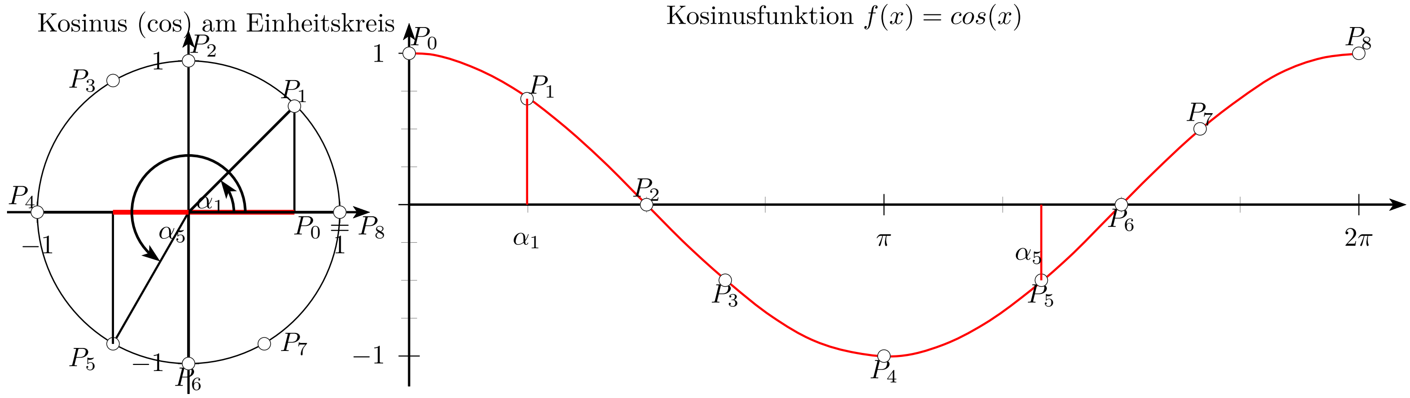
$x = 1,57rad$

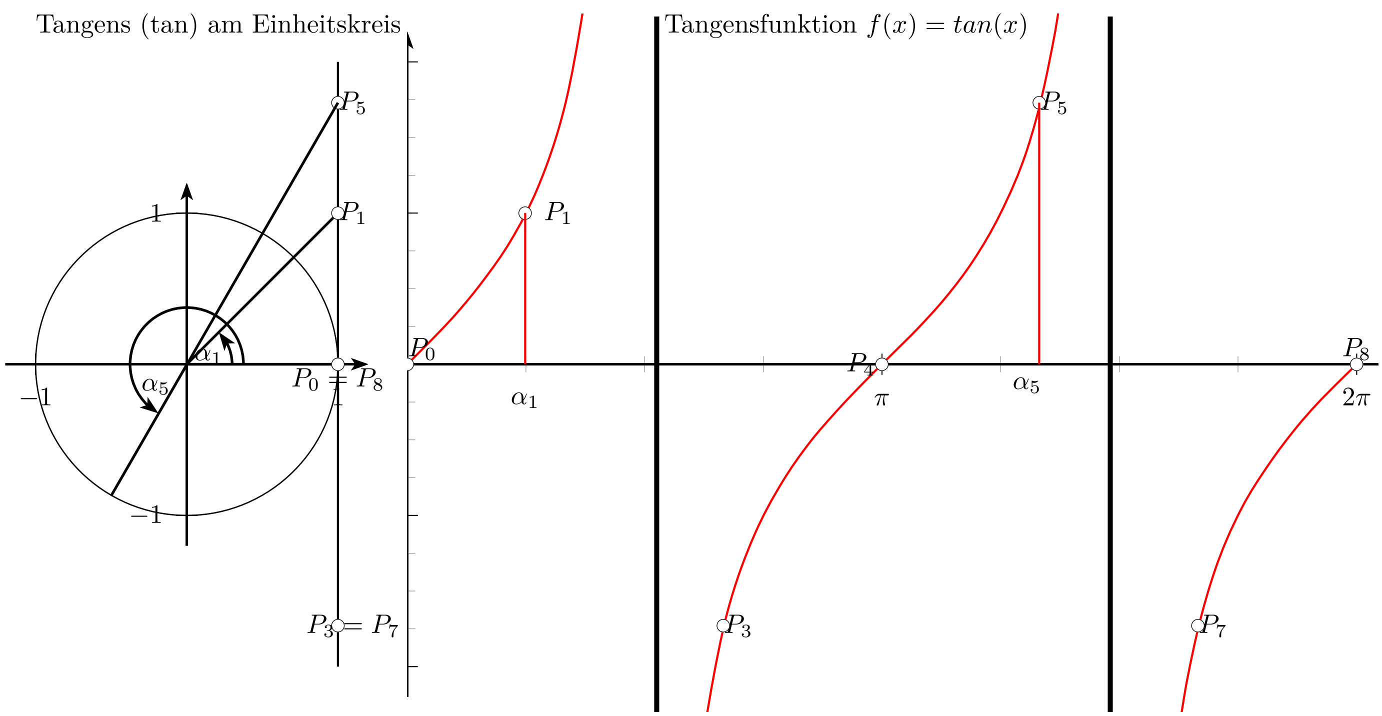
Interaktive Inhalte:

$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$ $x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$

2.7.2 Definition







	P_0		P_1		P_2	P_3			P_4				P_5	P_6	P_7		P_8
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x	0°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Trigonometrie - Einheitskreis - Funktionen

• Punkt auf dem Einheitskreis:

$P(cos\alpha/sin\alpha)$

• Trigonometrische Funktionen:

Sinusfunktion $f(x) = sin(x)$

Kosinusfunktion $f(x) = cos(x)$

Tangensfunktion $f(x) = tan(x)$

• Steigung :

$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = m$

Punkt auf dem Einheitskreis:

$P_1(\cos 45° / \sin 45°)$ $P_1(\cos \frac{1}{4}\pi / \sin \frac{1}{4}\pi)$ $P_1(\frac{1}{2}\sqrt{2}/\frac{1}{2}\sqrt{2})$

$P_2(\cos 90° / \sin 90°)$ $P_2(\cos \frac{1}{2}\pi / \sin \frac{1}{2}\pi)$ $P_2(0/1)$

$P_5(\cos 240° / \sin 240°)$ $P_5(\cos \frac{4}{3}\pi° / \sin \frac{4}{3}\pi)$ $P_5(-\frac{1}{2}/\frac{1}{2}\sqrt{3})$

Trigonometrische Funktion:

$f(\frac{1}{4}\pi) = sin(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$f(\frac{1}{4}\pi) = cos(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$f(\frac{1}{4}\pi) = tan(\frac{1}{4}\pi) = 1$

Komplementwinkel

$sin(90° - \alpha) = cos(\alpha)$

$cos(90° - \alpha) = sin(\alpha)$

$sin(90° - 30°) = sin(60°) = cos(30°)$

$cos(90° - 30°) = cos(60°) = sin(30°)$

Negative Winkel

$sin(-\alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$

$tan(-\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)}$

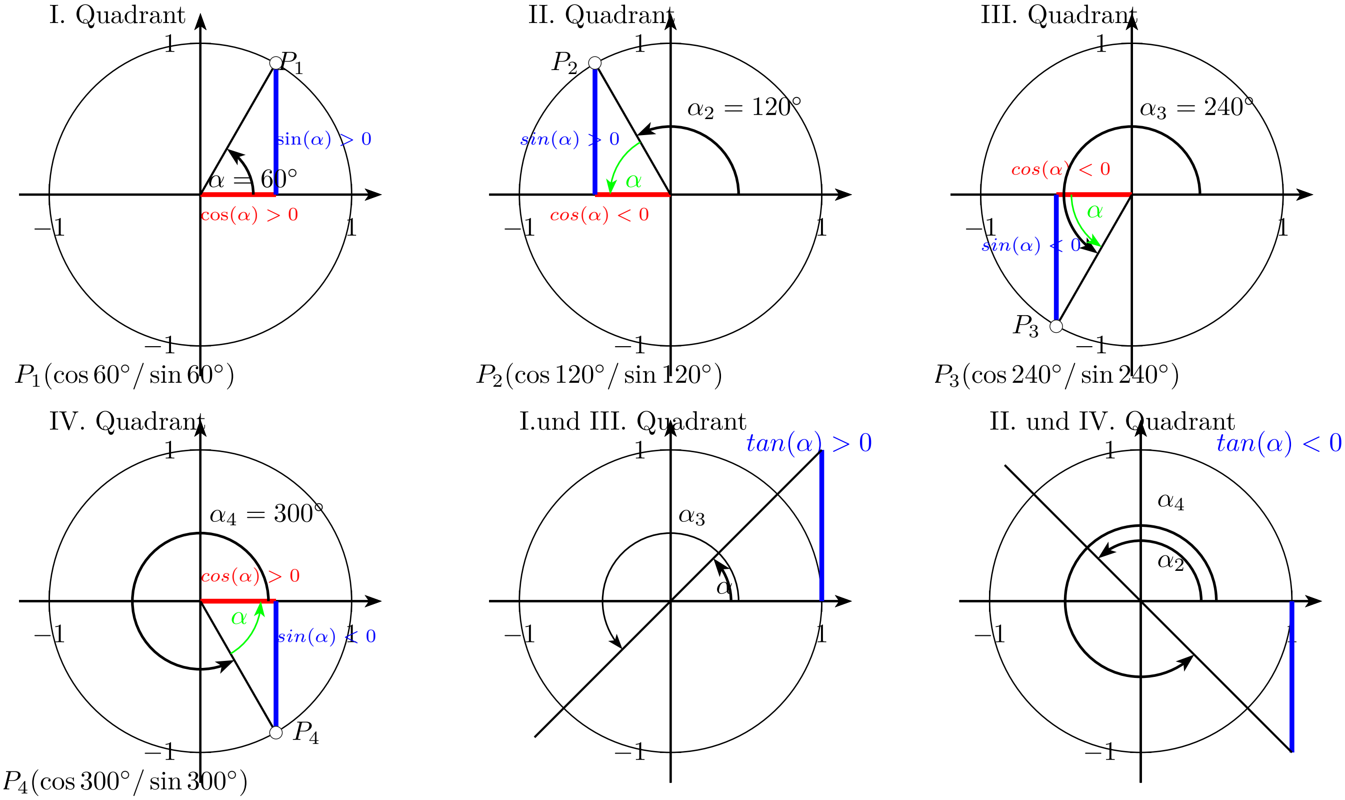
$sin(-30°) = -sin(30°)$

$cos(-30°) = cos(30°)$

$tan(-30°) = \frac{1}{tan(30°)}$

Interaktive Inhalte:
$\sin\alpha - \cos\alpha - \tan\alpha$ | $\sin\alpha = y$ | $\cos\alpha = x$ | $\tan\alpha = m$

2.7.3 Quadrantenregel



	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
I. Quadrant	+	+	+
II. Quadrant	+	-	-
III. Quadrant	-	-	+
IV. Quadrant	-	+	-

	DEG	RAD
I. Quadrant	α	x
II. Quadrant	$180° - \alpha$	$\pi - x$
III. Quadrant	$180° + \alpha$	$\pi + x$
IV. Quadrant	$360° - \alpha$	$2\pi - x$

α in Gradmaß

I. Quadrant $0° < \alpha < 90°$

$\sin(\alpha) > 0$ $\cos(\alpha) > 0$ $\tan(\alpha) > 0$

II. Quadrant $90° < \alpha_2 < 180°$

$\sin(\alpha_2) > 0$ $\cos(\alpha_2) < 0$ $\tan(\alpha_2) < 0$

$\alpha_2 = 180° - \alpha$

$sin(180° - \alpha) = sin(\alpha)$

$cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$

$tan(180° - \alpha) = -tan(\alpha)$

III. Quadrant $180° < \alpha_3 < 270°$

$\sin(\alpha_3) < 0$ $\cos(\alpha_3) < 0$ $\tan(\alpha_3) > 0$

$\alpha_3 = 180° + \alpha$

$sin(180° + \alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(180° + \alpha) = -cos(\alpha)$

$tan(180° + \alpha) = tan(\alpha)$

IV. Quadrant $270° < \alpha_4 < 360°$

$\sin(\alpha_4) < 0$ $\cos(\alpha_4) > 0$ $\tan(\alpha_4) < 0$

$\alpha_4 = 360° - \alpha$

$sin(360° - \alpha) = -sin(\alpha)$

$cos(360° - \alpha) = cos(\alpha)$

$tan(360° - \alpha) = -tan(\alpha)$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$
I Quadrant: $\alpha_1 = 30°$
II Quadrant: $\alpha_2 = 180° - 30° = 150°$
$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$
III Quadrant: $\alpha_1 = 180° + 30° = 210°$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 30° = 330°$
$\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
I Quadrant: $\alpha_1 = 45°$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 45° = 315°$
$\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
II Quadrant: $\alpha_1 = 180° - 45° = 135°$
III Quadrant: $\alpha_2 = 180° + 45° = 225°$

x in Bogenmaß

I. Quadrant $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$\sin(x) > 0$ $\cos(x) > 0$ $\tan(x) > 0$

II. Quadrant $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$

$\sin(x_2) > 0$ $\cos(x_2) < 0$ $\tan(x_2) < 0$

$x_2 = \pi - x$

$sin(\pi - x) = sin(x)$

$cos(\pi - x) = -cos(x)$

$tan(\pi - x) = -tan(x)$

III. Quadrant $\pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$

$\sin(x_3) < 0$ $\cos(x_3) < 0$ $\tan(x_3) > 0$

$x_3 = \pi + x$

$sin(\pi + x) = -sin(x)$

$cos(\pi + x) = -cos(x)$

$tan(\pi + x) = tan(x)$

IV. Quadrant $\frac{3\pi}{2} < x_4 < 2\pi$

$\sin(x_4) < 0$ $\cos(x_4) > 0$ $\tan(x_4) < 0$

$x_4 = 2\pi - x$

$sin(2\pi - x) = -sin(x)$

$cos(2\pi - x) = cos(x)$

$tan(2\pi - x) = -tan(x)$

$\sin x = \frac{1}{2}$
I Quadrant: $x_1 = \frac{1}{6}\pi$
II Quadrant: $x_2 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$
$\sin\alpha = -\frac{1}{2}$
III Quadrant: $x_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$
IV Quadrant: $x_1 = 2\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi$

$\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
I Quadrant: $x_1 = \frac{1}{4}\pi$
IV Quadrant: $x_2 = 2\pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{4}\pi$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
II Quadrant: $x_1 = \pi - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}\pi$
III Quadrant: $x_2 = pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi$

Interaktive Inhalte:
$\sin\alpha - \cos\alpha - \tan\alpha$ $\sin\alpha = y$ $\cos\alpha = x$ $\tan\alpha = m$

2.7.4 Umrechnungen

tan - sin - cos

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos 60° = \frac{1}{2}$
$\tan 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°}$
$\tan 60° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$
$\tan 60° = \sqrt{3}$
$\tan 60° = 1,73$

sin - cos

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$

$cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$

$\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\sin 30° = \sqrt{1 - \cos^2 30°}$
$\sin 30° = \sqrt{1 - (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}$
$\sin 30° = \sqrt{\frac{1}{4}}$
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$

Additionstheoreme

$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$

$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$

$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$

$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$

$tan(\alpha + \beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$

$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$

$sin2\alpha = 2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha$

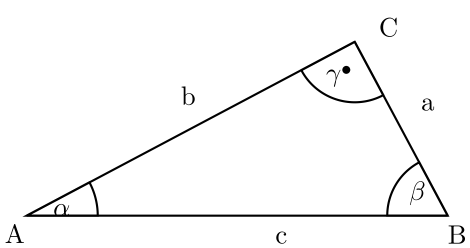
$cos2\alpha = 2 \cdot cos^2\alpha - 1 = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$tan2\alpha = \frac{2 \cdot tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$

$sin(\alpha + 30°) = sin\alpha \cdot cos30° + cos\alpha \cdot sin30°$
$sin(\alpha + 30°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$

Interaktive Inhalte:
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ | $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$ | $cos\alpha = \sqrt{1 - sin^2\alpha}$ | $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$ | $sin\alpha = tan\alpha \cdot cos\alpha$ | $cos\alpha = \frac{sin\alpha}{tan\alpha}$

2.7.5 Rechtwinkliges Dreieck



$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\quad$ $sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

c	Hypotenuse	m
a	Gegenkathete zu α	m
α	Winkel	$°$

$a = sin\alpha \cdot c \quad c = \frac{a}{sin\alpha}$

$cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\quad cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

c	Hypotenuse	m
b	Ankathete zu α	m
α	Winkel	$^\circ$

$b = cos\alpha \cdot c \quad c = \frac{b}{cos\alpha}$

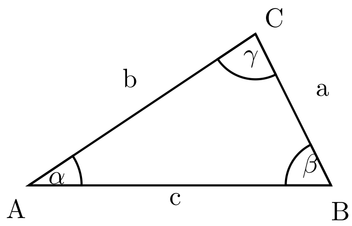
$tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\quad tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

b	Ankathete zu α	m
a	Gegenkathete zu α	m
α	Winkel	$^\circ$

$a = tan\alpha \cdot b \quad b = \frac{a}{tan\alpha}$

Interaktive Inhalte:
$sin\alpha = \frac{a}{c}$ $a = sin\alpha \cdot c$ $c = \frac{a}{sin\alpha}$ $cos\alpha = \frac{b}{c}$ $b = cos\alpha \cdot c$ $c = \frac{b}{cos\alpha}$ $tan\alpha = \frac{a}{b}$ $a = tan\alpha \cdot b$ $b = \frac{a}{tan\alpha}$

2.7.6 Sinussatz

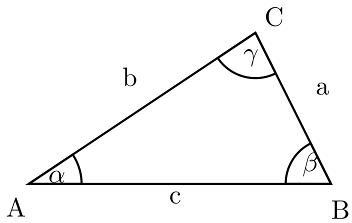


$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad / \cdot \sin\beta \quad / \cdot \sin\alpha$$
$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \quad / : b$$
$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad / \cdot \sin\alpha$$
$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$
$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b} \quad \sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$$
$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \quad \sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c}$$
$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a} \quad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$$
$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \quad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$
$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} \quad b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$
$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \quad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

Interaktive Inhalte:
$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$ $a = \frac{b \cdot sin\alpha}{sin\beta}$ $sin\alpha = \frac{a \cdot sin\beta}{b}$

2.7.7 Kosinussatz



$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2$

$0 = b^2 + c^2 - a^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad \cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}$

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma} \qquad \cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

Interaktive Inhalte:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$ $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha}$ $cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

2.7.8 Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck

Seite - Seite - Seite (SSS)

Seite	Seite	Seite
a	b	c

1. Zwei Winkel mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2 \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

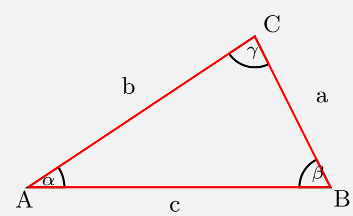
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

entsprechend

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad c = 4$

$\cos\alpha = \dfrac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$

$\cos\alpha = 0,8$

$\alpha = \arccos(0,8)$

$\alpha = 33,1°$

$\cos\beta = \dfrac{2,2^2 + 4^2 - 3,6^2}{2 \cdot 2,2 \cdot 4}$

$\cos\beta = 0,4$

$\beta = \arccos(0,4)$

$\beta = 63,4°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

1. Gegenüberliegende Seite mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$

2. Winkel mit Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \qquad / - a^2 \qquad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / : (2 \cdot b \cdot c)$

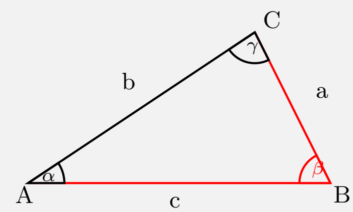
$\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$

entsprechend

$\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \qquad \cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$

3. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$



$a = 2,2 \quad c = 4 \quad \beta = 63,4°$

$b = \sqrt{2,2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 4 \cdot \cos 63,4°}$

$b = 3,6$

$\cos\alpha = \dfrac{3,6^2 + 4^2 - 2,2^2}{2 \cdot 3,6 \cdot 4}$

$\cos\alpha = 0,8$

$\alpha = \arccos(0,8)$

$\alpha = 33,1°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

Winkel - Seite - Winkel (WSW,WWS)

Winkel	Seite	Winkel
α	c	β
α	b	γ
β	a	γ

Winkel	Winkel	Seite
α	β	a
α	β	b
α	γ	a
α	γ	c
β	γ	b
β	γ	c

1. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

2. Eine Seite über den Sinussatz berechnen

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta$$

$$b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

entsprechend

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} \qquad c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \qquad a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

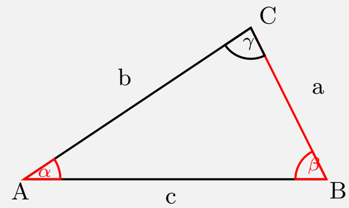
3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$



$a = 2,2 \quad \alpha = 33,1° \quad \beta = 63,4°$

$\gamma = 180° - \alpha - \beta$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

$$b = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4}{\sin 33,1}$$

$b = 3,6$

$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5°}$

$c = 4$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b

1. Winkel mit dem Sinussatz berechnen

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad / \cdot \sin\beta \qquad / \cdot \sin\alpha$

$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \qquad / : b$

$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$

entsprechend

$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} \qquad \sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

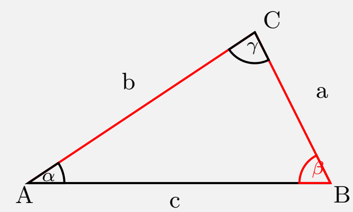
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\beta \qquad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$

entsprechend

$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta} \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$



$a = 2,2 \quad b = 3,6 \quad \beta = 63,4°$

$\sin\alpha = \frac{2,2 \cdot \sin 63,4°}{3,6}$

$\sin\alpha = 0,5$

$\alpha = \arcsin(0,5)$

$\alpha = 33,1°$

$\gamma = 180° - 33,1° - 63,4°$

$\gamma = 83,5°$

$c = \sqrt{2,2^2 + 3,6^2 - 2 \cdot 2,2 \cdot 3,6 \cdot \cos 83,5°}$

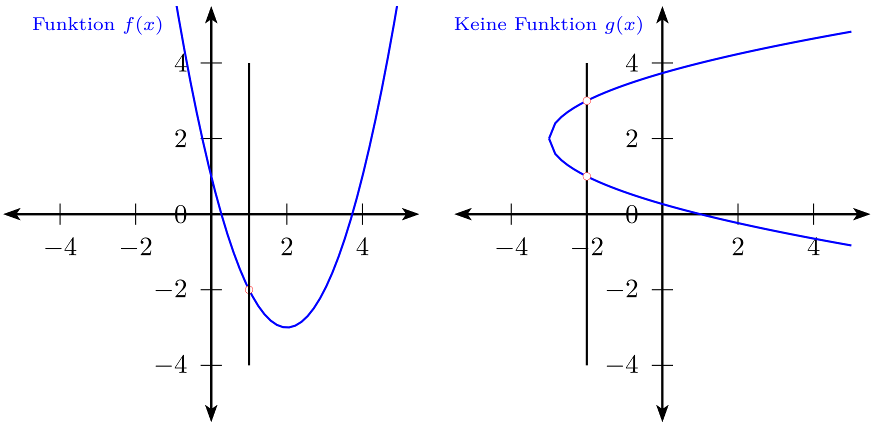
$c = 4$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

3 Funktionen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition



• Jedem Element x aus der Definitionsmenge D wird genau ein Element y aus der Wertemenge W zugeordnet.
• Jede Parallele zur y-Achse schneidet den Graphen der Funktion höchstens einmal.
• x - unabhängige Variable y - abhängige Variable
• Zu jeder Funktion gehört ein Definitionsbereich. Fehlt die Angabe des Definitionsbereichs, gilt $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Ein Tafel Schokolade kostet 2 €.
Wieviel kosten 1, 2, 3, 4, 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

$\mathbb{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$\mathbb{W} = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	4
y	2	4	6	8	10

keine eindeutige Zordnung ⇒ keine Funktion

Schreibweise

$y = f(x)$ - Funktionsgleichung, Funktion
$f(x)$ - Funktionsterm
$f : x \mapsto y$ x-Werte werden auf y-Werte abgebildet
$f : x \mapsto f(x)$ x-Werte werden auf f(x) abgebildet

$y = 2 \cdot x$
$f(x) = 2 \cdot x$
$f : x \mapsto 2 \cdot x$

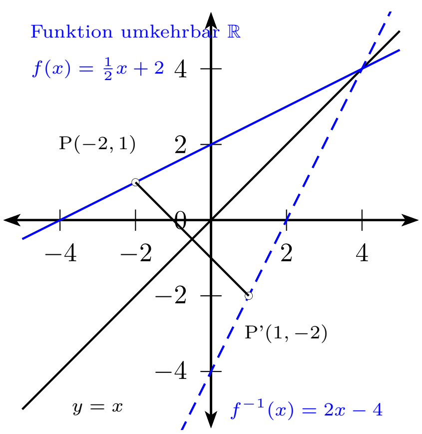
Definitions- und Wertebereich

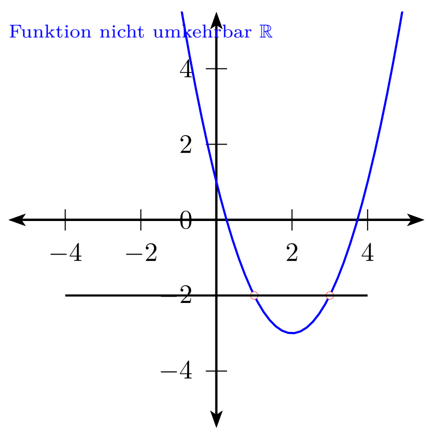
• Definitionsbereich
Zahlenbereich der für x (unabhängige Variable) eingesetzt werden darf.
• Einschränkungen des Definitionsbereichs sind nötig bei:
- Textaufgaben, bei denen nur bestimmte x-Wert möglich sind.
- Bruchfunktionen: Division durch Null ist nicht erlaubt. (Nenner $\neq 0$)
- Wurzelfunktionen: unter der Wurzel (Radikant) dürfen keine negativen Zahlen stehen. (Radikant ≥ 0)
- Logarithmusfunktionen: das Argument muss positiv sein. (Argument > 0)

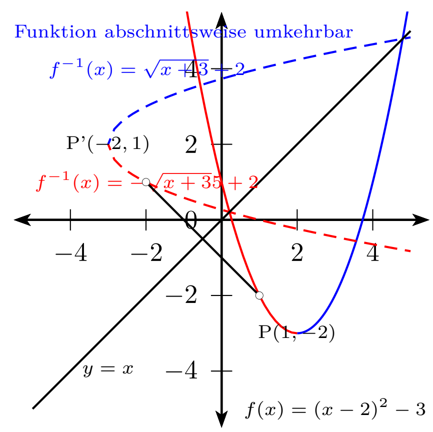
• Wertebereich
Zahlenbereich den y (abhängige Variable Funktionswert) annehmen kann.

$y = (x+3)^{-1} + 1 = \frac{1}{x+3} + 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$y = \log_3(x) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

3.1.2 Umkehrfunktion







Definition der Umkehrfunktion

• Jedem Element y aus der Wertemenge W wird genau ein Element x aus der Definitionsmenge D zugeordnet.
• y - unabhängige Variable $\quad x$ - abhängige Variable
• Funktionen sind umkehrbar,
- wenn die Graphen der Funktion im Definitionsbereich streng monoton steigen oder streng monoton fallen.
- wenn jede Parallele zur x-Achse den Graphen der Funktion höchstens einmal schneidet.
• $\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{W} \qquad \mathbb{W}^{-1} = \mathbb{D}$

Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \quad f: y = \frac{1}{2}x + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$

$\mathbb{D} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
$\mathbb{W} = \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5\}$

Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = 2x - 4 \quad f^{-1}: y = 2x - 4$

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

$\mathbb{D}^{-1} = \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5\}$
$\mathbb{W}^{-1} = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	10	10

keine eindeutige Zordnung $\Rightarrow$ keine Umkehrfunktion

Schreibweise

$x = f^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion

$f : y \mapsto x$ y-Werte werden auf x-Werte abgebildet

Nach dem Vertauschen der Variablen:

$y = f^{-1}(x)$ - Umkehrfunktion

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

$\mathbb{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

$\mathbb{W} = \{2; 4; 6; 8; 10\}$

Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	4
y	2	4	6	8	10

keine eindeutige Zordnung $\Rightarrow$ keine Funktion

Ermittlen der Umkehrfunktion

Graphisch: Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.

Algebraisch: Funktionsgleichung nach x auflösen und die Variablen x und y vertauschen.

$y = 2 \cdot x - 3$ /+3 /:2

$\frac{y+3}{2} = x$

$\frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2} = x$

$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$

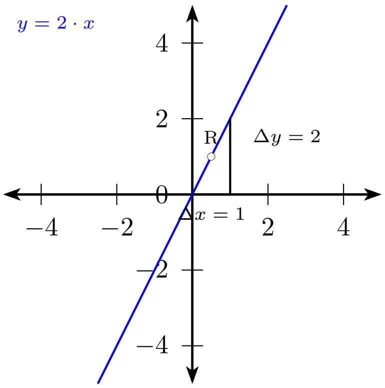
Vertauschen der Variablen:

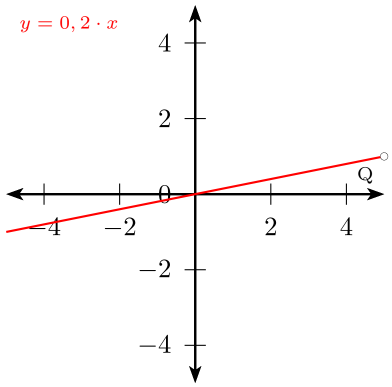
$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$

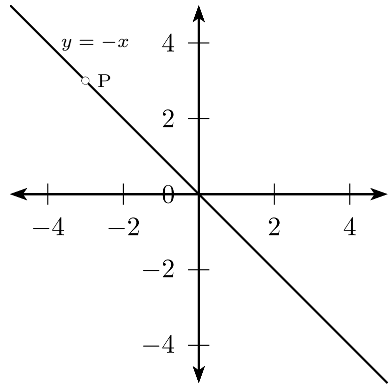
$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$

3.2 Lineare Funktion

3.2.1 Ursprungsgerade







Ursprungsgerade

$y = m \cdot x$

Steigung-Proportionalitätsfaktor: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ $y = 0$ entspricht der x-Achse

$m < 0$ fallend

Winkelhalbierende des I und III Quadranten: $y = x$

Winkelhalbierende des II und IV Quadranten: $y = -x$

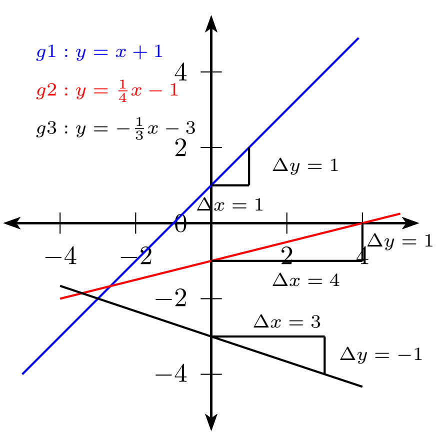
$y = m \cdot x$
$y = 2 \cdot x$ $m = 2$
$R(\frac{1}{2}/y)$ $x = \frac{1}{2}$
$y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ $R(\frac{1}{2}/1)$

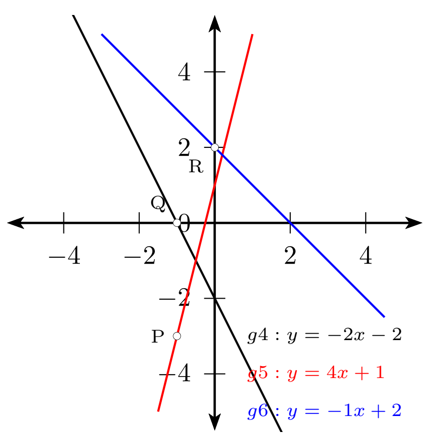
$m = \frac{y}{x}$
$Q(5/1)$ $y = 1$ $x = 5$
$m = \frac{1}{5}$ $y = \frac{1}{5}x$

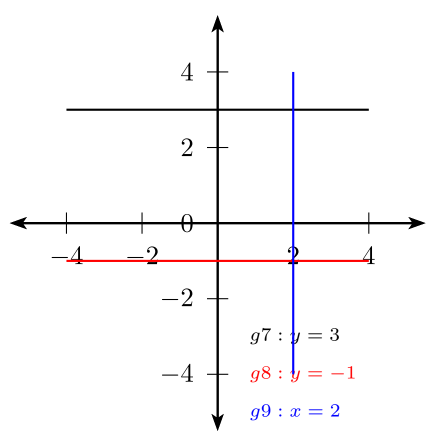
$x = \frac{y}{m}$
$P(x/3)$ $y = -1 \cdot x$
$m = -1$ $y = 3$
$3 = -1 \cdot x$
$x = -3$ $P(-3/3)$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable | $y = m \cdot x$ | $x = \frac{y}{m}$ | $m = \frac{y}{x}$

3.2.2 Graph und Eigenschaften







Gerade - lineare Funktion

$y = m \cdot x + t$ $\quad f(x) = m \cdot x + t$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Steigung: $\quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ parallel zur x-Achse

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: $\quad t$

Besondere Geraden:

$y = 0$ x-Achse

$y = t$ Parallele zur x-Achse im Abstand t

$x = 0$ y-Achse

$x = k$ Parallele zur y-Achse im Abstand k

$g1 : y = x + 1$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$

$m > 0$ steigend

y-Achsenabschnitt: $t = 1$

$g2 : y = \frac{1}{4}x - 1$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$

$m > 0$ steigend

y-Achsenabschnitt: $t = -1$

$g3 : y = -\frac{1}{3}x - 3$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: $t = -3$

$g5 : y = 4x + 1$

Steigung: $m = 4$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1}$

y-Achsenabschnitt: $t = 1$

$P(-1/y) \quad x = 1$

$y = 4 \cdot (-1) + 1$

$y = -1 \quad P(-1/-3)$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstelle

$y = mx + t$

$y = 0 \qquad mx + t = 0$

$x = \frac{-t}{m}$

$g4 : y = -2x - 2$

$0 = -2x - 2 \qquad / + 2$

$2 = -2x \qquad / : (-2)$

$x = -1 \quad Q(-1/0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$x = 0 \qquad y = m \cdot 0 + t$

$y = m \cdot 0 + t$

$y = t$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$g5 : y = -x + 2$

$y = -1 \cdot 0 + 2$

$y = 2$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$+$ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$g5: y = 4x + 1 = 0$
$4x + 1 = 0 \qquad / -1$
$4x = -1 \qquad / : 4$
$x = \frac{-1}{4}$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = -1$
$g5: y = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$
Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g5: y = 4 \cdot (0) + 1 = +1$
Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$+ \quad f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

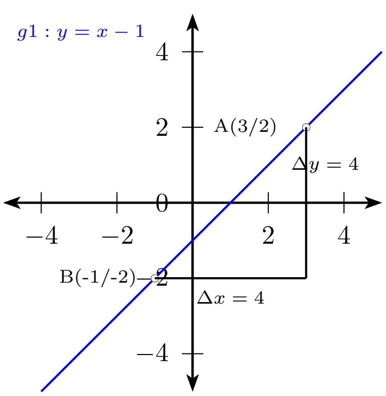
$4x + 1 > 0$ für $x \in] -\frac{1}{4}; \infty[$

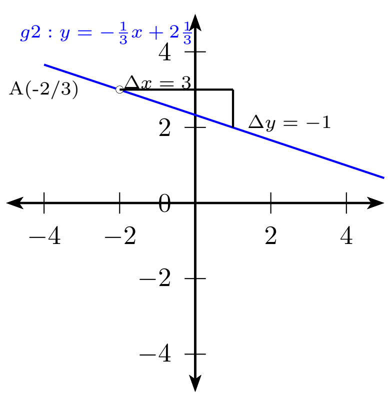
$- \quad f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

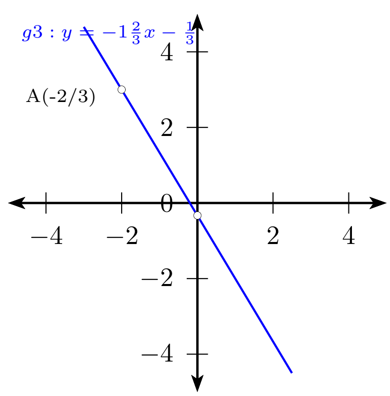
$4x + 1 < 0$ für $x \in] -\infty; -\frac{1}{4}[$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable | Eigenschaften | $y = m \cdot x + t$ | $m = \frac{y-t}{x}$ | $x = \frac{y-t}{m}$ | $t = y - m \cdot x$

3.2.3 Geradengleichung aufstellen







Gerade durch 2 Punkte

$y = m \cdot x + t$
$A(xa/ya) \qquad B(xb/yb)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ya - yb}{xa - xb}$
$t = ya - m \cdot xa$

$A(3/2) \qquad B(-1/-2)$
$m = \frac{2+2}{3+1}$
$m = 1$
$2 = 1 \cdot 3 + t$
$2 = 3 + t \qquad / -3$
$t = 2 - 3$
$t = -1$
$g_1: y = x - 1$

Gerade durch den Punkt A mit der Steiung m

$y = m \cdot x + t$
$A(xa/ya)$ Steigung: m
$t = ya - m \cdot xa$

$A(-2/3) \qquad m = -\frac{1}{3}$
$3 = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + t$
$3 = \frac{2}{3} + t \qquad / - \frac{2}{3}$
$t = 3 - \frac{2}{3}$
$t = 2\frac{1}{3}$
$g_2 : y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

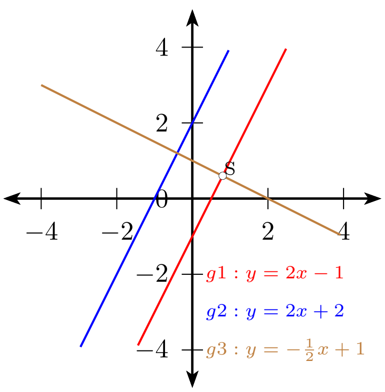
Gerade durch den Punkt A und den y-Achsenabschnitt t

$A(xa/ya)$ y-Achsenabschnitt: t
$m = \frac{ya-t}{xa}$

$A(-2/3) \qquad t = -\frac{1}{3}$
$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3}$
$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3} \qquad / + \frac{1}{3}$
$3 + \frac{1}{3} = m \cdot (-2) \qquad / : -2$
$m = -1\frac{2}{3}$
$g_3 : y = -1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Interaktive Inhalte:
2 Punkte | Punkt und Steigung | Punkt und y-Achsenabschnitt

3.2.4 Gerade - Gerade



Parallele Geraden

$g1 : y = m_1x + t_1 \qquad g2 : y = m_2x + t_2$
$m_1 = m_2 \Rightarrow g1 \parallel g2$

$g1 : y = 2x - 1 \quad g2 : y = 2x + 2$
$m_1 = m_2$
$2 = 2$
$\Rightarrow g1 \parallel g2$

Senkrechte Geraden

$g1 : y = m_1x + t_1 \qquad g3 : y = m_3x + t_3$
$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow g1 \perp g3$

$g1 : y = 2x - 1 \quad g3 : y = -\frac{1}{2}x + 1$
$m_1 \cdot m_2 = -1$
$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$
$\Rightarrow g1 \perp g3$

Schnittpunkt zweier Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g3: y = m_3x + t_3$

- Terme gleichsetzen:

$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$

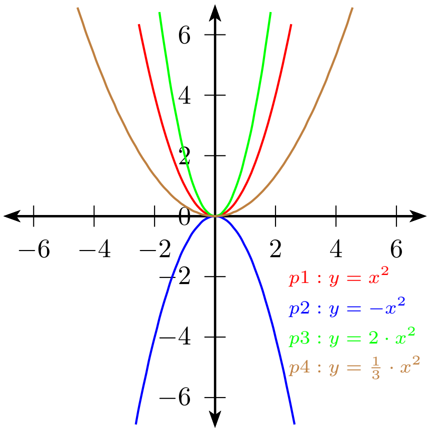
- x-Wert durch Umformen berechnen
- x-Wert in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen.

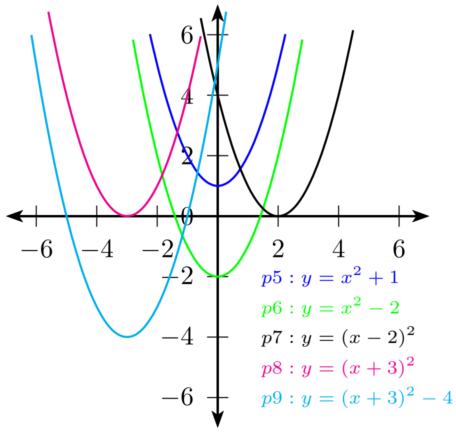
$g_1: y = 2x - 1 \qquad g_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \qquad / + \frac{1}{2}x$
$2\frac{1}{2}x - 1 = 1 \qquad / + 1$
$2\frac{1}{2}x = 2 \qquad / : 2\frac{1}{2}$
$x = \frac{4}{5}$
$g_1: y = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1$
$S(\frac{4}{5}/\frac{3}{5})$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | $y = m_1x + t_1 \qquad y = m_2x + t_2$

3.3 Quadratische Funktion

3.3.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Parabelgleichung

Normalparabel	$y = x^2$
Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$
Scheitelform	$y = a(x - xs)^2 + ys$
faktorisierte Form	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
a	Formfaktor
$a > 0$	nach oben geöffnet
$a < 0$	nach unten geöffnet
$\|a\| > 1$	gestreckt
$\|a\| < 1$	gestaucht
x_s	Verschiebung in x-Richtung
y_s	Verschiebung in y-Richtung
$S(x_s/y_s)$	Scheitelkoordinaten
x_1, x_2	Nullstellen

$p1: y = x^2$ $S(0/0)$ Normalparabel nach oben geöffnet
$p2: y = -x^2$ $S(0/0)$ Normalparabel nach unten geöffnet
$p3: y = 2x^2$ $S(0/0)$ $a = 2$ gestreckt
$p4: y = \frac{1}{3}x^2$ $S(0/0)$ $a = \frac{1}{3}$ gestaucht
$p5: y = x^2 + 1$ $S(0/1)$ 1 nach oben verschoben
$p6: y = x^2 - 2$ $S(0/-2)$ 2 nach unten verschoben
$p7: y = (x-2)^2$ $S(2/0)$ 2 nach rechts verschoben
$p8: y = (x+3)^2$ $S(-3/0)$ 3 nach links verschoben
$p9: y = (x+3)^2 - 4$ $S(-3/-4)$ 3 nach links verschoben und 4 nach unten verschoben

Definitions- und Wertebreich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0$ $\mathbb{W} = [$y-Wert des Scheitels$; \infty[$
$a < 0$ $\mathbb{W} =]-\infty;$ y-Wert des Scheitels$]$

$p2: y = -x^2$ $S(0/0)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty; 0]$
$p9: y = (x+3)^2 - 4$ $S(-3/-4)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-4; \infty[$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstellen

$y = ax^2 + bx + c$

$y = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ eine Nullstelle

$D > 0$ zwei Nullstellen

$D < 0$ keine Nullstelle

$p9 : y = x^2 + 6x + 5 = 0$

$1x^2 + 6x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$

$x_1 = \dfrac{-6 + 4}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6 - 4}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$

$D > 0 \Rightarrow$ zwei Nullstellen

$p9 : y = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$

$p5 : y = x^2 + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2}$

$D < 0 \Rightarrow$ keine Nullstelle

$p8 : y = x^2 + 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-6 \pm 0}{2}$

$x_{1/2} = -3 \quad D = 0 \Rightarrow$ eine Nullstellen

Schnittpunkt mit der y-Achse

$p : y = ax^2 + bx + c$

$x = 0 \qquad p : y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$p(x) = c \qquad Q(0/c)$

$p9 : y = x^2 + 6x + 5$

$y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 5$

$y = 5 \qquad Q(0/5)$

Allgemeine Form in Scheitelform

Allgemeine Form:

$y = ax^2 + bx + c$

Scheitelform:

$y = a(x - xs)^2 + ys$

Quadratische Ergänzung:

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$

$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$

$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$

$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$x_s = -\frac{b}{2 \cdot a}$

$y_s = c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$

Scheitelformel:

$S(x_s/y_s)$

$S(-\frac{b}{2 \cdot a}/c - \frac{b^2}{4 \cdot a})$

quadratische Ergänzung

$p9 : y = x^2 + 6x + 5$

$p9 : y = (x^2 + 6x + 5)$

$p9 : y = (x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 5)$

$p9 : y = [(x + 3)^2 - 3^2 + 5]$

$p9 : y = [(x + 3)^2 - 9 + 5]$

$p9 : y = [(x + 3)^2 - 4]$

$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$

Scheitel(-3/-4)

Scheitelformel

$y = x^2 + 6x + 5$

$xs = -\frac{6}{2 \cdot 1}$

$xs = -3$

$ys = 5 - \frac{6^2}{4 \cdot 1}$

$ys = -4$

$Scheitel(-3/-4)$

$p9 : y = (x + 3)^2 - 4$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable | $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ | *Eigenschaften*

3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen

Parabelgleichung aus 2 Punkten und dem Formfaktor

Gegeben: Formfaktor a und Punkte $A(x_a/y_a)$ und $B(x_b/y_b)$

• Formfaktor a und Punkt $A(x_a/y_a)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$y_a = ax_a^2 + bx_a + c$

• Formfaktor a und Punkt $B(x_b/y_b)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$y_b = ax_b^2 + bx_b + c$

siehe Lösung von linearen Gleichungssystemen

$a = -2 \qquad A(2/-1) \qquad B(-1/4)$
Formfaktor a einsetzen:
$y = -2x^2 + bx + c$
I)Punkt A einsetzen
$-1 = -2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$
$-1 = -8 + 2b + c \qquad / + 8 \quad / - 2b$
$-1 + 8 - 2b = c$
$7 - 2b = c$
II)Punkt B einsetzen
$4 = -2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$
$4 = -2 - 1b + c$
I in II
$4 = -2 - 1b + 7 - 2b$
$4 = 5 - 3b \qquad / - 5 \qquad / : (-3)$
$b = \frac{4-5}{-3}$
$b = \frac{1}{3}$
$c = 7 - 2 \cdot \frac{1}{3}$
$c = 6\frac{1}{3}$
$y = -2x^2 + \frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$

Parabelgleichung aus Formfaktor und dem Scheitel

Formfaktor a und Scheitel in Scheitelform einsetzen:

$y = a(x - xs)^2 + ys$

Binomische Formel auflösen:

$y = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot xs + xs^2) + ys$

$y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot xs + a \cdot xs^2 + ys$

Formfaktor: $a = -\frac{1}{2} \qquad S(2/-3)$
$y = a(x - xs)^2 + ys$
$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$
$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) - 3$
$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$

Parabelgleichung aus einem Punkt und dem Scheitel

Punkt $A(x_a/y_a)$ und Scheitel $S(x_s/y_s)$in die Scheitelform einsetzen und nach a auflösen. $y_a = a(x_a - xs)^2 + ys$

$A(2/-4) \qquad S(1/2)$
$y = a(x - xs)^2 + ys$
$-4 = a(2 - 1)^2 + 2$
$-4 = 1 \cdot a + 2 \qquad / - 2 \qquad / : 1$
$a = \frac{-4-2}{1}$
$a = -6$
$y = -6(x - 1)^2 + 2$
$y = -6(x^2 - 2x + 1^2) + 2$
$y = -6x^2 + 12x - 4$

Parabelgleichung aus Formfaktor und Nullstellen

Formfaktor a und Nullstellen in die faktorisierte Form einsetzen.

$P(x_1/0) \qquad Q(x_2/0) \qquad a$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

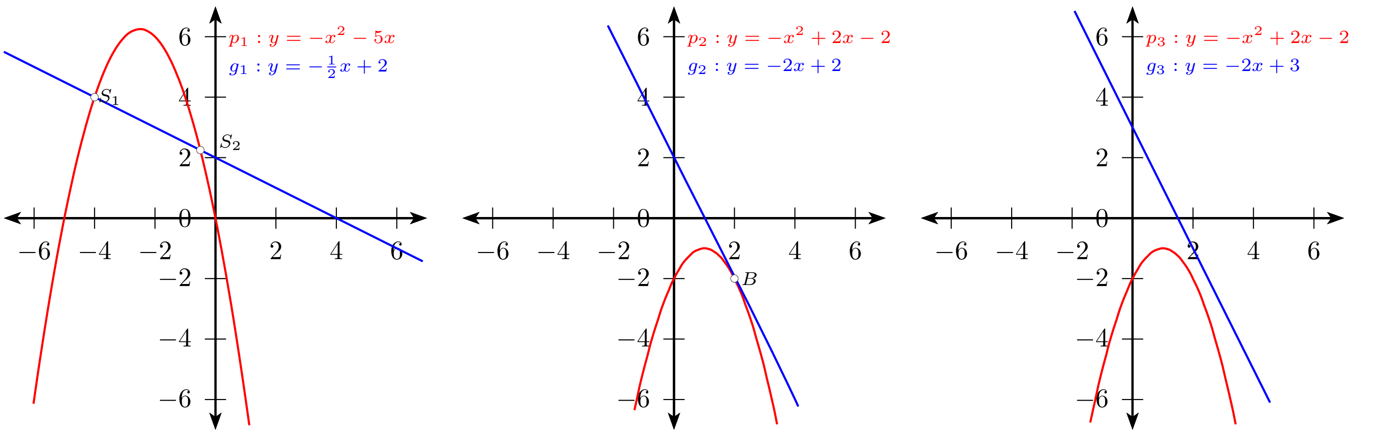
$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$

$y = ax^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$

Nullstellen $x_1 = 1 \qquad x_2 = -4 \qquad a = 7$
$P(1/0) \qquad Q(-4/0) \qquad a = 7$
$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
$y = 7(x - 1)(x + 4)$
$y = 7(x^2 + 4x - 1x - 4)$
$y = 7(x^2 + 3x - 4)$
$y = 7x^2 + 21x - 28$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable | 2 Punkte und Formfaktor | Scheitel und Formfaktor | Scheitel und Punkt | Nullstellen -

3.3.3 Parabel - Gerade



$p : y = ax^2 + bx + c \qquad g : y = mx + t$

Terme gleichsetzen: $ax^2 + bx + c = mx + t$

Term nach Null umformen: $ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührpunkt

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

Die x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen.

$p_1 : y = -x^2 - 5x \qquad g_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$

$-1x^2 - 5x = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad / + \frac{1}{2}x / - 2$

$-1x^2 - 5x + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$-1x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-4\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$y = -1(-4)^2 - 5(-4) = 4 \qquad S_1(-4/4)$

$y = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + 2 = 2\frac{1}{4} \qquad S_2(-\frac{1}{2}/2\frac{1}{4})$

$p_2 : y = -x^2 + 2x - 2 \qquad g_2 : y = -2x + 2$

$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 2$

$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 2) = 0$

$-x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} \qquad = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 + 0}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 0}{-2}$$

$x_{1/2} = 2$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührpunkt

$y = -2$

$B(2/-2)$

$p_3 : y = -x^2 + 2x - 2 \qquad g_3 : y = -2x + 3$

$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 3$

$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 3) = 0$

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

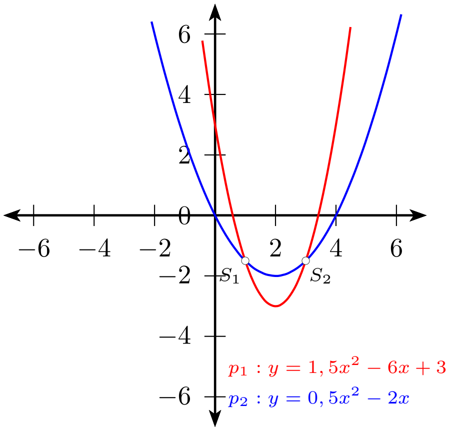
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$$

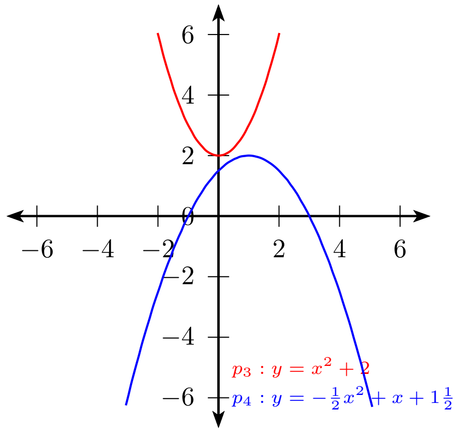
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

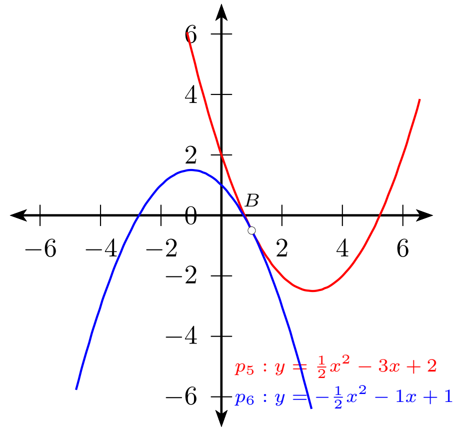
$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable Parabel-Gerade

3.3.4 Parabel - Parabel







$p_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$

$p_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Terme gleichsetzen:

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Term nach Null umformen:

$ax^2 + bx + c = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Berührpunkt

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$D < 0$keinen Schnittpunkt

Die x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen.

$p_1 : y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 \qquad p_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 - (\frac{1}{2}x^2 - 2x) = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \qquad x_2 = \frac{4-2}{2}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$y = 1\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -1\frac{1}{2} \qquad S_1(3/-1\frac{1}{2})$

$y = 1\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -1\frac{1}{2} \qquad S_2(1/-1\frac{1}{2})$

$p_3 : y = x^2 + 2 \qquad p_4 : y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$

$x^2 + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}) = 0$

$1\frac{1}{2}x^2 - 1x + \frac{1}{2} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-2}}{3}$$

$D < 0$ keinen Schnittpunkt

$p_5 : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \qquad p_6 : y = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1) = 0$

$1x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

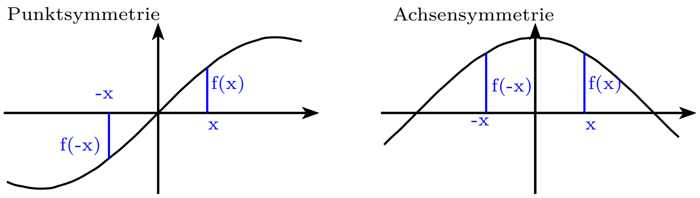
$$x_1 = \frac{2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{2-0}{2}$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad D = 0$ Berührpunkt $\quad B(1/-\frac{1}{2})$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable Parabel-Parabel

3.4 Eigenschaften von Funktionen

3.4.1 Symmetrie



Punktsymmetrie zum Ursprung - ungerade Funktion

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

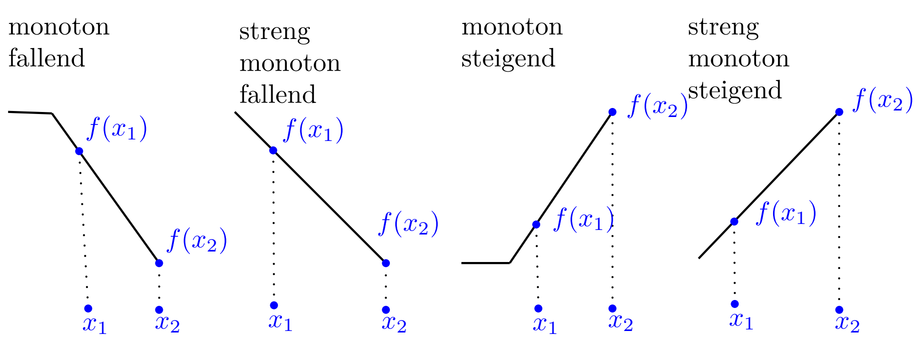
$f(x) = -2x^5 + 3x^3$
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3$
$f(-x) = -\left(-2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3\right)$
$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ist eine ungerade Funktion

Achsensymmetrie zur y-Achse - gerade Funktion

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

$f(x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1$
$f(-x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ist eine gerade Funktion

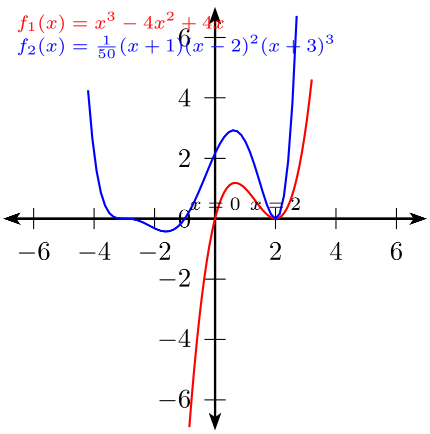
3.4.2 Monotonie

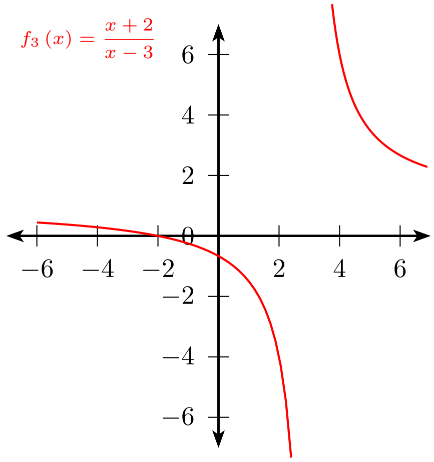


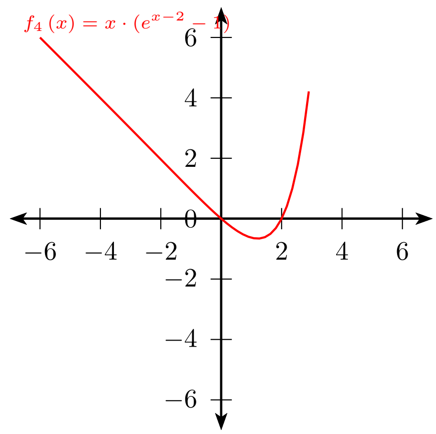
$x_1 < x_2$

monoton steigend		$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	sms	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend		$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	smf	$f(x_1) > f(x_2)$

3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen







Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.

$f(x) = 0$ (siehe Algebra-Gleichungen)

- Vielfachheit der Nullstelle gerade

- Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW)

- Berührpunkt mit die x-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt)

- Vielfachheit der Nullstelle ungerade

- Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW)

- Schnittpunkt mit die x-Achse

Einfache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1) \cdot ..$

Zweifache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot ..$

Dreifache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot ..$

Vierfache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^4 \cdot ..$

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
Einfache Nullstelle mit VZW: $x = 0$ $N_1(0/0)$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$

$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$
Einfache Nullstelle mit VZW: $x = -1$ $N_1(-1/0)$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$
Dreifache Nullstelle mit VZW: $x = -3$ $N_3(-3/0)$
$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$
$e^{(x-2)} - 1 = 0 \quad / + 1$
$e^{(x-2)} = 1 \quad / \ln$
$x - 2 = \ln(1) \quad / + 2$
$x = 2$

Schnittpunkte mit der y-Achse

x=0 in den Funktionsterm einsetzen.

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
$f_1(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$
$P(0/0)$
$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$
$f_2(0) = \frac{1}{50}(0+1)(0-2)^2(0+3)^3 = 2,16$
$Q(0/2,16)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen oder den Definitionslücken ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x<$	x_1	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+	f(x)>0	Graph oberhalb der x-Achse
-	f(x)<0	Graph unterhalb der x-Achse

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$

Nullstellen: $x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

Wert kleiner als 0 wählen: $-1 < 0 \qquad f_1(-1) = -1 < 0 \Rightarrow -$

Wert zwischen 0 und 2 wählen:

$0 < 1,2 < 2 \qquad f_1(1,2) = 0,768 > 0 \Rightarrow +$

Wert größer als 2 wählen: $3 > 2 \qquad f_1(3) = 1 > 0 \Rightarrow +$

Vorzeichentabelle:

	$x<$	0	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]0;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_3(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

Definitionsbereich: $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x_1 = -2$ 1-fache Nullstelle

Vorzeichentabelle:

	$x<$	-2	$<x<$	3	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2;3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$

$x_1 = 0;$ 1-fache Nullstelle

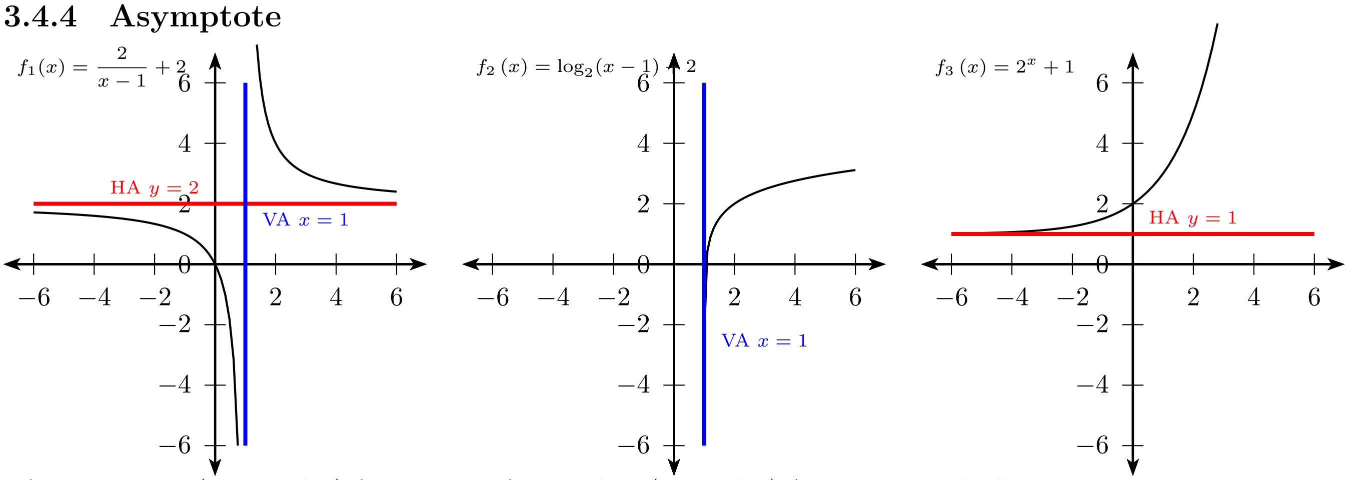
$x_2 = 2;$ 1-fache Nullstelle

	$x<$	0	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]0;2[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

3.4.4 Asymptote



HA - Horizontale (waagerechte) Asymptote; VA - Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Definition

Eine Asymptote ist ein Gerade, der sich eine Funktion beliebig weit annähert. (siehe Analysis - Grenzwerte)

$f_1(x) = \dfrac{2}{x-1} + 2$

nicht kürzbare Nullstellen des Nenners

$VA: x = 1 \qquad HA: y = 2$

Horizontale (waagerechte) Asymptote

Funktionsgleichung: $y = a$

$f_3(x) = 2^x + 1$
$HA: y = 1$

Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Funktionsgleichung: $x = b$

$f_2(x) = \log_2(x-1) + 2$
$VA: x = 1$

3.4.5 Verknüpfung von Funktionen

Addition von Funktionen

$u(x) = f(x) + g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) + g(x)$
$u(x) = x^2 + e^x$

Subtraktion von Funktionen

$u(x) = f(x) - g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) - g(x)$
$u(x) = x^2 - e^x$

Multiplikation von Funktionen

$u(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) \cdot g(x)$
$u(x) = x^2 \cdot e^x$

Division von Funktionen

$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
$u(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Verketten von Funktionen

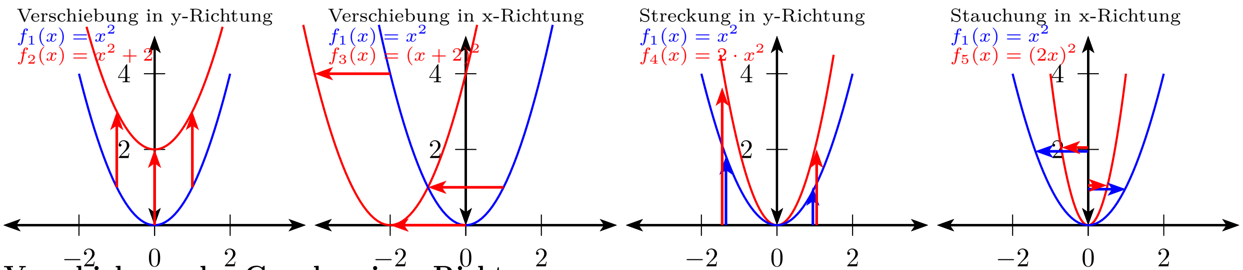
äußere Funktion f(x) - innere Funktion g(x)
$u(x) = f(g(x))$ oder $f \circ g = f(g(x))$ f nach g

äußere Funktion g(x) - innere Funktion f(x)
$v(x) = g(f(x))$ oder $g \circ f = g(f(x))$ g nach f

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(g(x))$
$u(x) = (e^x)^2$
$v(x) = g(f(x))$
$v(x) = e^{x^2}$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph

3.4.6 Abbildung von Funktionen



Verschiebung des Graphen in y-Richtung

$y = f(x) + d$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = x^2 + 2$
Verschiebung um d=2 in y-Richtung
$g_1(x) = e^x \qquad g_2(x) = e^x - 3$
Verschiebung um d= -3 in y-Richtung

Verschiebung des Graphen in x-Richtung

$y = f(x - c)$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_3(x) = (x-2)^2$
Verschiebung um c=2 in x-Richtung
$g_1(x) = e^x \qquad g_3(x) = e^{x+3}$
Verschiebung um c= -3 in x-Richtung

Streckung - Stauchung in y-Richtung

y = a · f(x)

$a > 1$: Streckung in y-Richtung

$0 < a < 1$: Stauchung in y-Richtung

$a = -1$: Spiegelung an der x-Achse

$a < -1$: Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung

$f_1(x) = x^2 \qquad f_4(x) = 2x^2$
Streckung in y-Richtung mit $a = 2$
$g_1(x) = e^x \qquad g_4(x) = \frac{1}{3}e^x$
Stauchung in y-Richtung mit $a = \frac{1}{3}$
$f_5(x) = e^x \qquad f_6(x) = -e^x$
Spiegelung an der x-Achse

Streckung - Stauchung in x-Richtung

$y = f(b \cdot x)$

$b > 1$: Stauchung in x-Richung mit $\frac{1}{b}$

$0 < b < 1$: Streckung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$

$b = -1$: Spiegelung an der y-Achse

$b < -1$: Spiegelung an der y-Achse und Stauchung in x-Richung mit $\frac{1}{b}$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_5(x) = (2x)^2$
$b = 2$ Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{2}$
$g_1(x) = e^x \qquad f_5(x) = e^{(\frac{1}{3}x)}$
$b = \frac{1}{3}$ Streckung in x-Richtung mit 3
$f_5(x) = e^x \qquad f_6(x) = e^{-x}$
Spiegelung an der y-Achse

Zusammenfassung

$y = a \cdot f(b(x - c)) + d$

$y = a \cdot f(bx - cb) + d$

a: Streckung/Stauchung in y-Richtung

$\frac{1}{b}$: Streckung/Stauchung in x-Richtung

c: Verschiebung des Graphen in x-Richtung

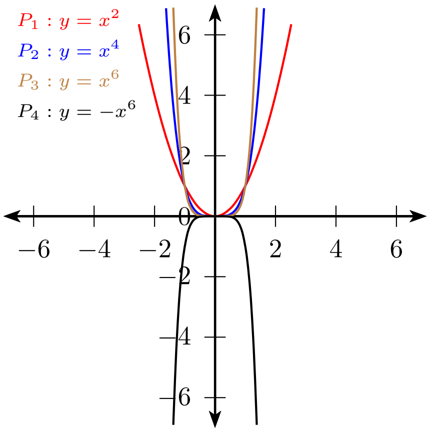
d: Verschiebung des Graphen in y-Richtung

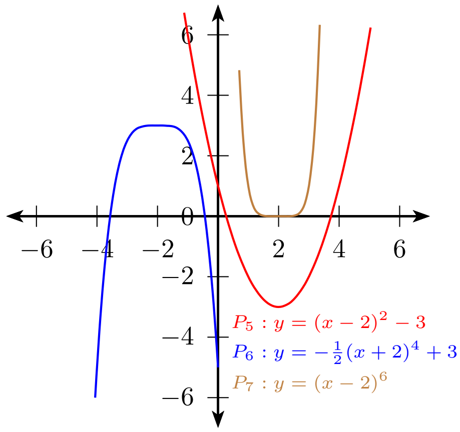
$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = -3(2x-6)^2 + 1 = -3[2(x-3)]^2 + 1$
Streckung in y-Richtung und Spieglung an der x-Achse: $a = -3$
Stauchung in x-Richtung: $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$
Verschiebung des Graphen in x-Richtung: $c = \frac{-6}{2} = 3$
Verschiebung in y-Richtung: $d = 1$
Verschiebung in x-Richtung: 3

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph

3.5 Potenzfunktion

3.5.1 Parabeln vom Grad n - gerader Exponent





Formen der Parabelgleichung - gerader Exponent

Exponent: 2,4,6..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^n + d$

$y = a(b(x-c))^n + d$

$P_1 : y = x^2 \qquad P_5 : y = (x-2)^2 - 3$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung
$P_2 : y = x^4 \qquad P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse und Stauchung um $\frac{1}{2}$ in y-Richtung
$P_3 : y = x^6 \qquad P_9 : y = 2(x+4)^4$
Streckung um 2 in y-Richtung und Verschiebung um -4 in x-Richtung
$P_3 : y = x^6 \qquad P_7 : y = (x-2)^6$
Verschiebung um 2 in x-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^n \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x-c))^n + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

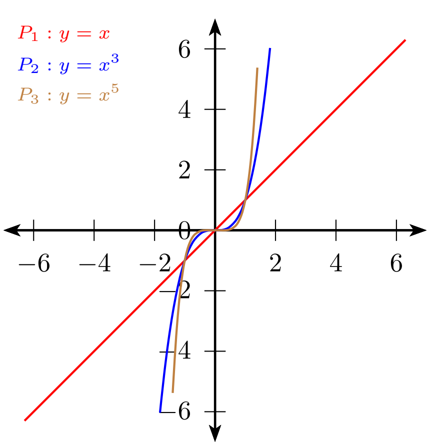
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

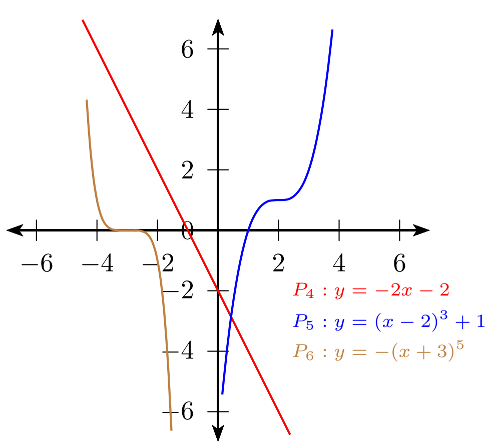
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$P_2 : y = x^4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$P_5 : y = (x-2)^2 - 3 \; \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [-3; \infty[$
$P_4 : y = -x^6 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$
$P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$ $P_9 : y = 2(x+4)^4$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable

3.5.2 Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent





Formen der Parabelgleichung - ungerader Exponent

Exponent: 1,3,5..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^n + d$

$y = a(b(x-c))^n + d$

$P_1: y = x \qquad P_4: y = -2x - 2$

Verschiebung um -2 in y-Richtung und Strechung um -2 in y-Richtung.

$P_2: y = x^3 \qquad P_5: y = (x-2)^3 + 1$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.

$P_3: y = x^5 \qquad P_6: y = -(x+3)^5$

Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um -3 in x-Richtung.

Definitions- und Wertebereich

$y = x^n \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$y = a(b(x-c))^n + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

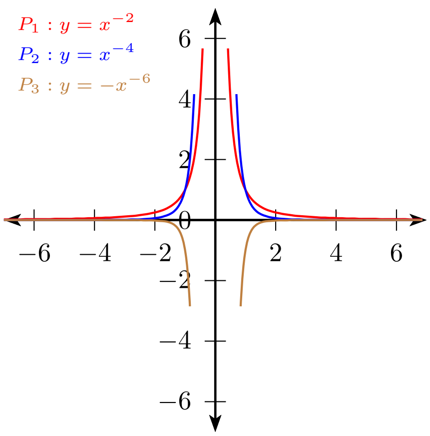
$P_2: y = x^3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

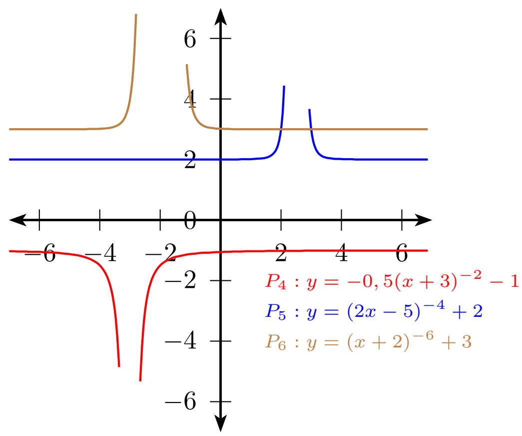
$P_5: y = (x-2)^3 + 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Interaktive Inhalte:

Funktionsgraph Wertetable

3.5.3 Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent





Formen der Hyperbelgleichung - gerader Exponent

Exponent: -2,-4,-6..

Grundfunktion: $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^{-n} + d = \dfrac{a}{(x-c)^n} + d$

$y = a(b(x-c))^{-n} + d = \dfrac{a}{(b(x-c))^n} + d$

$P_1: y = x^{-2} \qquad P_4: y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung

Streckung um -0,5 in y-Richtung

$P_2: y = x^{-4} \qquad P_5: y = (2x-5)^{-4} + 2 = (2(x-2,5))^{-4} + 2$

Verschiebung um 2,5 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung

Stauchung um 2 in x-Richtung

$y = x^{-6} \qquad P_6: y = (x+2)^{-6} + 3$

Streckung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a(b(x-c))^{-n} + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$P_1: y = x^{-2} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$P_4: y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$

$P_6: y = (x+2)^{-6} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad \mathbb{W} =]3; \infty[$

Asymptoten

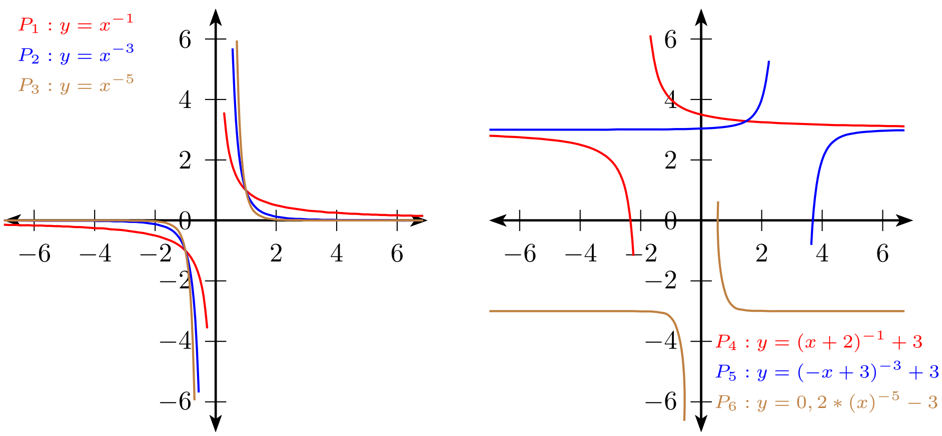
$y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$
Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
Horizontale Asymptote: $y = d$
Vertikale Asymptote: $x = c$

$P_1: y = x^{-2}$ HA: $y = 0$ VA: $x = 0$
$P_4: y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$ HA: $y = -1$ VA: $x = -3$

$P_6: y = (x+2)^{-6} + 3$ HA: $y = 3$ VA: $x = -2$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.5.4 Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent



Formen der Hyperbelgleichung - ungerader Exponent

Exponent: -1,-3,-5..
Grundfunktion: $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a(x-c)^{-n} + d = \dfrac{a}{(x-c)^n} + d$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d = \dfrac{a}{(b(x-c))^n} + d$

$P_1: y = x^{-1}$ $P_4: y = (x+2)^{-1} + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung um 3 in y-Richtung
$P_2: y = x^{-3}$ $P_5: y = (-x+3)^{-3} + 3 = (-1(x-3))^{-3} + 3$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
Spiegelung an der y-Achse
$P_3: y = x^{-5}$ $P_6: y = 0,2 * x^{-5} - 3$
Streckung um -3 in y-Richtung und Stauchung um 0,2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-n}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{d\}$

$P_1: y = x^{-1}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$P_4: y = (x+2)^{-1} + 3$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$P_6: y = 0,2 * x^{-5} - 3$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Asymptoten

$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$y = a(b(x-c))^{-n} + d$

Horizontale Asymptote: $y = d$

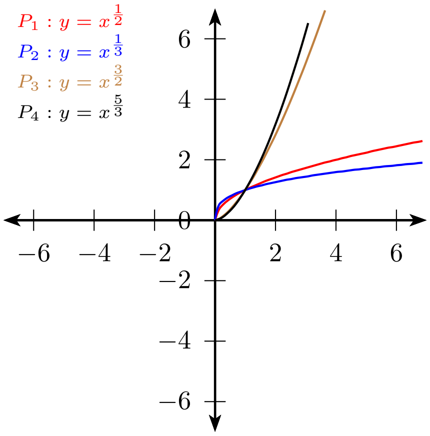
Vertikale Asymptote: $x = c$

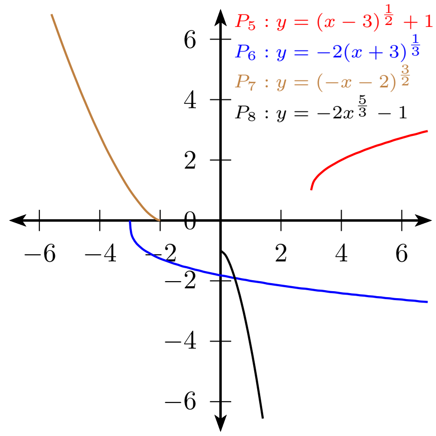
$P_1 : y = x^{-1}$ HA: $y = 0$ VA: $x = 0$
$P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$ HA: $y = 3$ VA: $x = -2$

$P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$ HA: $y = -3$ VA: $x = 0$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent





Formen der Wurzelfunktion - positiver Exponent

Quadratwurzelfuktion: $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $x > 0$
Grundfunktion: $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ $x > 0$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a(x-c)^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(x-c)^n} + d$ $x - c > 0$
$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d$ $b(x-c) > 0$

$P_1 : y = x^{\frac{1}{2}}$ $P_5 : y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
$P_2 : y = x^{\frac{1}{3}}$ $P_6 : y = -2(x+3)^{\frac{1}{3}}$
Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung
$P_3 : y = x^{\frac{3}{2}}$ $P_7 : y = (-x-2)^{\frac{3}{2}} = (-(x+2))^{\frac{3}{2}}$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse
$P_4 : y = x^{\frac{5}{3}}$ $P_8 : y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1$
Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

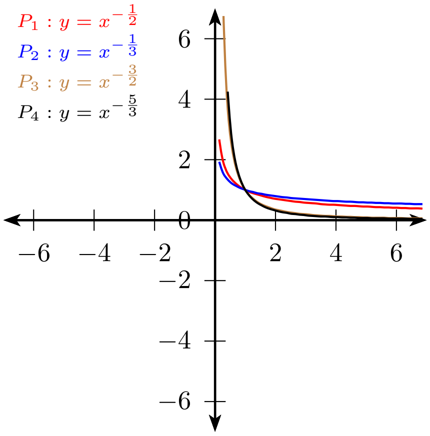
Definitions- und Wertebereich

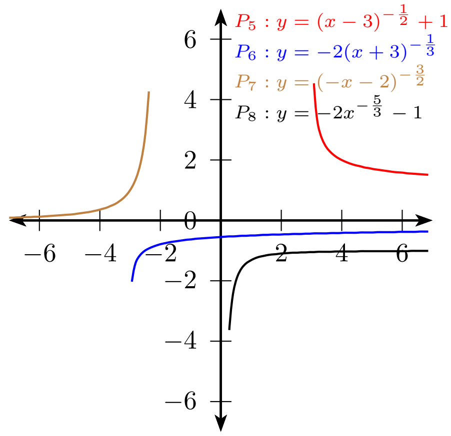
$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d$
$b > 0$ $\mathbb{D} = [c; \infty[$
$b < 0$ $\mathbb{D} =]-\infty; c]$
$a > 0$ $\mathbb{W} = [d; \infty[$
$a < 0$ $\mathbb{W} =]-\infty; d]$

$P_2 : y = x^{\frac{1}{3}}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$P_5 : y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1$ $\mathbb{D} = [3; \infty[$ $\mathbb{W} = [1; \infty[$
$P_8 : y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ $\mathbb{W} =]-\infty; -1]$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent





Formen der Wurzelfunktion - negativer Exponent

$y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad x > 0$

Grundfunktion: $y = x^{-\frac{n}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \qquad x > 0$

Funktion mit Formvariablen: $y = a(x-c)^{-\frac{n}{m}} + d = \dfrac{a}{\sqrt[m]{(x-c)^n}} + d \qquad x - c > 0$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = a\dfrac{1}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d \qquad b(x-c) > 0$

$P_1: y = x^{-\frac{1}{2}} \qquad P_5: y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
$P_2: y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad P_6: y = -2(x+3)^{-\frac{1}{3}}$
Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung
$P_3: y = x^{-\frac{3}{2}} \qquad P_7: y = (-x-2)^{\frac{3}{2}} = (-(x+2))^{-\frac{3}{2}}$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse
$P_4: y = x^{-\frac{5}{3}} \qquad P_8: y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1$
Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-\frac{n}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \dfrac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$

$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$P_2: y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$P_5: y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \qquad \mathbb{D} =]3; \infty[\quad \mathbb{W} =]1; \infty[$
$P_8: y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$

Asymptoten

$y = x^{-\frac{n}{m}} = \dfrac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \dfrac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

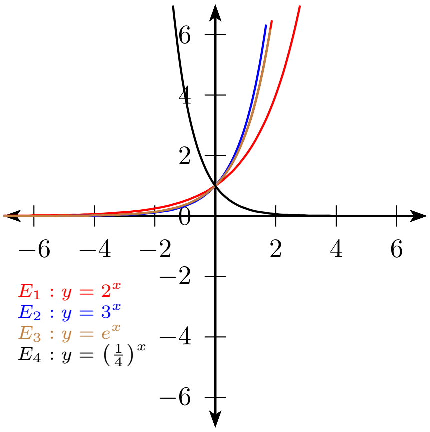
[$P_2: y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad$ HA: $y = 0 \qquad$ VA: $x = 0$
$P_5: y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \qquad$ HA: $y = -1 \qquad$ VA: $x = 3$

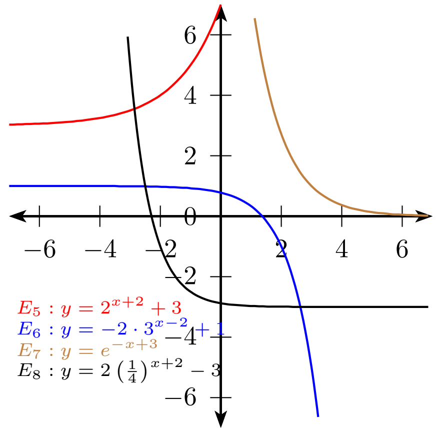
$P_8: y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \qquad$ HA: $y = -1 \qquad$ VA: $x = 0$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.6 Exponentialfunktion

3.6.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Exponentialfunktion

Grundfunktion: $y = q^x \qquad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a \cdot q^{(x-c)} + d \qquad q > 0$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad q > 0$

Funktionen mit der Basis: e = 2,718..

Grundfunktion: $y = e^x$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a \cdot e^{(x-c)} + d$

$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

$E_1 : y = 2^x \qquad E_5 : y = 2^{x+2} + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung.
$E_2 : y = 3^x \qquad E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.
Streckung um -2 in y-Richtung.
$E_3 : y = e^x \qquad E_7 : y = e^{-x+3} = e^{-(x-3)}$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse.
$E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x} \qquad E_8 : y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung.
Streckung um 2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = e^x \qquad y = q^x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$a > 0 \qquad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \qquad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$E_1 : y = 2^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3; \infty[$
$E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1 \; \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; 1[$
$E_8 : y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \; \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-3; \infty[$

Asymptoten

$y = e^x \qquad y = q^x$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

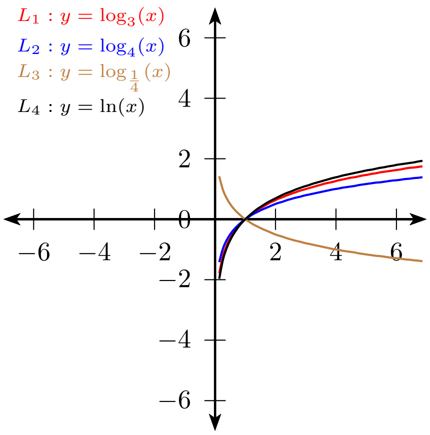
Horizontale Asymptote: $y = d$

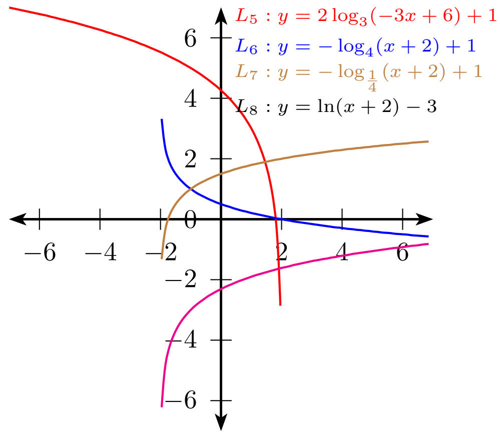
[$E_1 : y = 2^x \qquad$ HA: $y = 0$
$E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \qquad$ HA: $y = 3$
$E_8 : y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \qquad$ HA: $y = -3$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.7 Logarithmusfunktion

3.7.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Logarithmusfunktion

Grundfunktion: $y = \log_q x \qquad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a\log_q(x-c)+d \qquad -\frac{d}{c} > 0$

$y = a\log_q(b(x-c))+d$

Funktionen mit der Basis: e = 2,718..

Grundfunktion: $y = \ln x$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a\ln(x-c)+d$

$y = a\ln(b(x-c))+d$

$L_1 : y = \log_3(x) \qquad L_5 : y = 2\log_3(-3x+6)+1 = 2\log_3(-3(x-2))+1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.
Streckung um 2 in y-Richtung und um -3 in x-Richtung.
$L_2 : y = \log_4(x) \qquad L_6 : y = -\log_4(x+2)+1$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.
Spiegelung an der x-Achse.
$L_3 : y = \log_{\frac{1}{4}}(x) \qquad L_7 : y = -\log_{\frac{1}{4}}(x+2)+1$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung.
Spiegelung an der x-Achse
$L_4 : y = \ln(x) \qquad L_8 : y = \ln(x+2)-3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung.

Definitions- und Wertebereich

$y = \log_q x \qquad y = \ln x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$y = a\log_q(b(x-c))+d \qquad y = a\ln(b(x-c))+d$

Definitionsbereich: $b(x-c) > 0$

$b > 0 \qquad \mathbb{D} =]c;\infty[$

$b < 0 \qquad \mathbb{D} =]-\infty;c[$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$L_5 : y = 2\log_3(-3x+6) \qquad \mathbb{D} =]-\infty;2[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$L_6 : y = -\log_4(x+2)+1 \qquad \mathbb{D} =]-2;\infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$L_8 : y = \ln(x+2)-3 \qquad \mathbb{D} =]-2;\infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Asymptoten

$y = \log_q x \qquad y = \ln x$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$y = a\log_q(b(x-c))+d \qquad y = a\ln(b(x-c))+d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

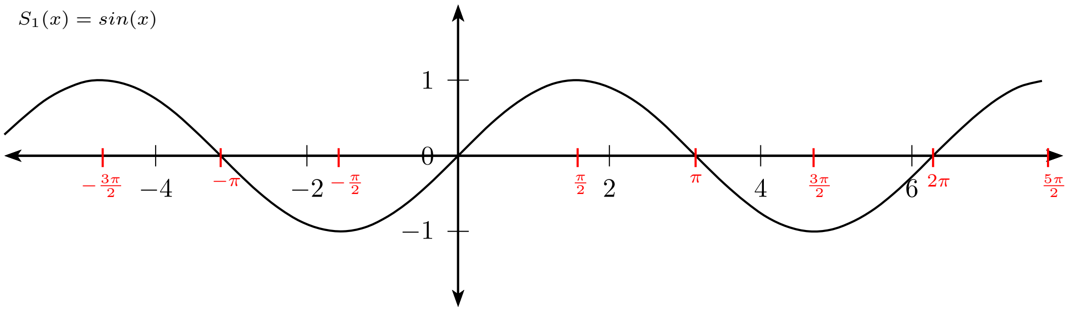
[$L_5 : y = 2\log_3(-3x+6) \qquad$ VA: $x = 2$
$L_6 : y = -\log_4(x+2)+1 \qquad$ VA: $x = -2$

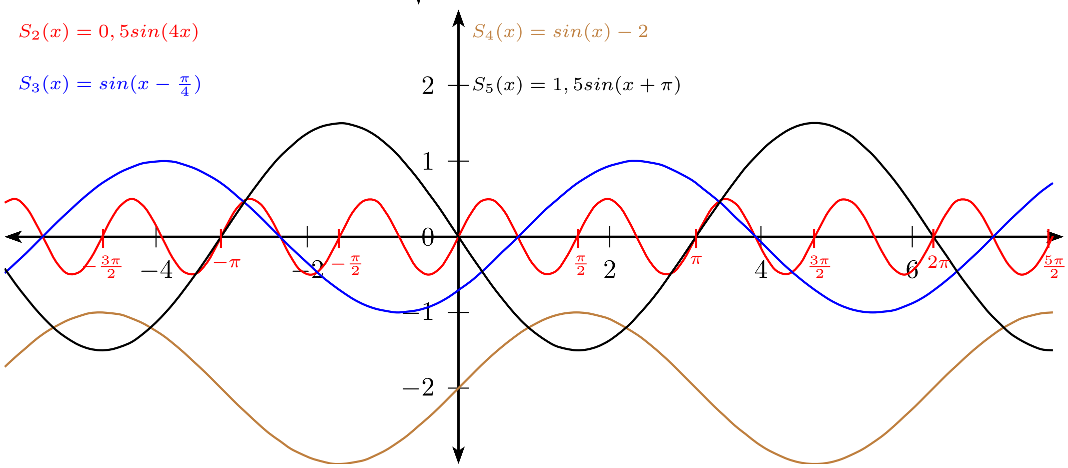
$L_8 : y = \ln(x+2)-3 \qquad$ VA: $x = -2$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.8 Sinusfunktion

3.8.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Sinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \sin x$

Amplitude: 1   Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a \sin(x - c) + d$

$f(x) = a \sin(b(x - c) + d$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$S_1(x) = \sin(x)$ $S_2(x) = 0,5sin(4x)$
Stauchung um $0,5$ in y-Richtung und $\frac{1}{4}$ in x-Richtung.
Amplitude: $0,5$ Periode: $\frac{2\pi}{4}$
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_3(x) = sin(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung.
Amplitude: 1   Periode: 2π
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_4(x) = sin(x) - 2$
Verschiebung um -2 in y-Richtung
Amplitude: 1   Periode: 2π
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_5(x) = 1,5sin(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$ in x-Richtung und Streckung um 1,5 in y-Richtung.
Amplitude: 1   Periode: 2π

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \sin(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [1; -1]$

$f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$

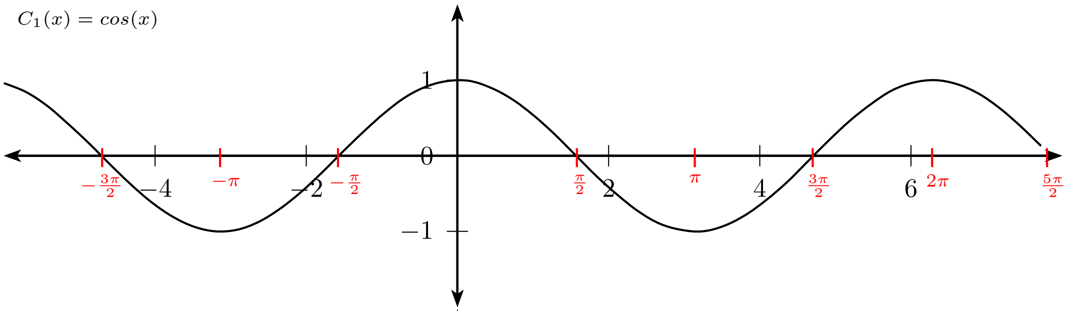
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

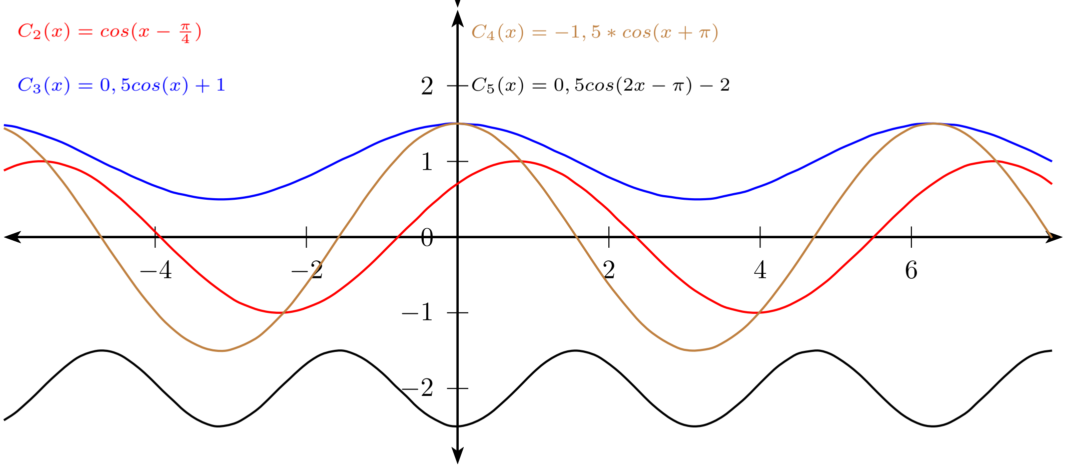
$S_2(x) = 0,5sin(4x)$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$S_3(x) = sin(x - \frac{\pi}{4})$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$S_4(x) = sin(x) - 2$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; -3]$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph | Wertetable

3.9 Kosinusfunktion

3.9.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Kosinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \cos x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a\cos(x - c) + d$

$f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$C_1(x) = \cos(x)$ $C_2(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung.
Amplitude: 1 Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_3(x) = 0,5cos(x) + 1$
Verschiebung um 1 in y-Richtung und Stauchung um 0,5 in y-Richtung.
Amplitude: $0,5$ Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_4(x) = -1,5 * cos(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$in x-Richtung.
Amplitude: $1,5$ Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_5(x) = 0,5cos(2x - \pi) - 2 = 0,5cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 2$
Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung und Streckung um 0,5 in y-Richtung.
Amplitude: $0,5$ Periode: Periode: $\frac{2\pi}{2}$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \cos(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [1; -1]$

$f(x) = a\cos(b(x - c) + d$

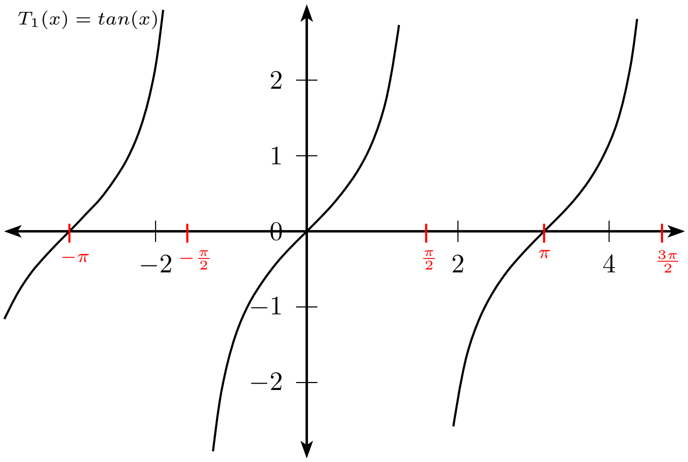
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

$C_2(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$C_3(x) = 0,5cos(x) + 1$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$C_5(x) = 0,5cos(2x - \pi) - 2$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1,5; -2,5]$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.10 Tangensfunktion

3.10.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Tangenfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \tan x$

Periode: π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a \tan (x - c) + d$

$f(x) = a \tan (b(x - c)) + d$

Periode: $\frac{\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \tan x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{k \cdot \frac{\pi}{2}\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = a \tan b(x - c) + d$

$b(x - c) = k\frac{\pi}{2}$

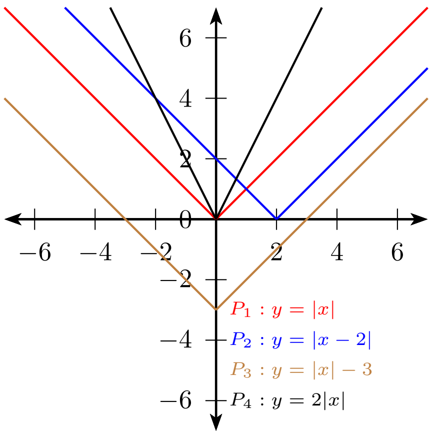
$x = \frac{k\pi}{2b} + c$

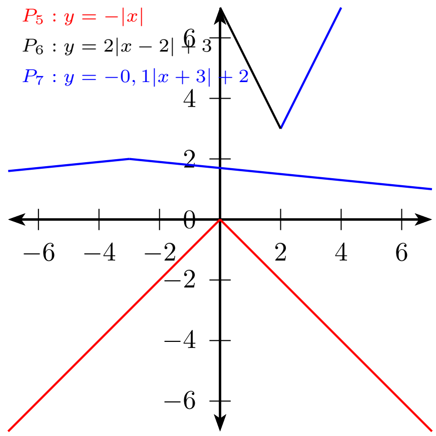
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \backslash \{\frac{k\pi}{2b} + c\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

3.11 Betragsfunktion

3.11.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Betragsfunktion

Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor den Term geschrieben wird.
Grundfunktion:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a|b(x-c)| + d = \begin{cases} a(b(x-c)) + d & x > c \\ -a(b(x-c)) + d & x < c \\ d & x = c \end{cases}$$

$$P_6 : y = 2|x-2| + 3 = \begin{cases} 2(x-2) + 3 & x > 2 \\ -2(x-2) + 3 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ -2x + 7 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

Definitions- und Wertebereich

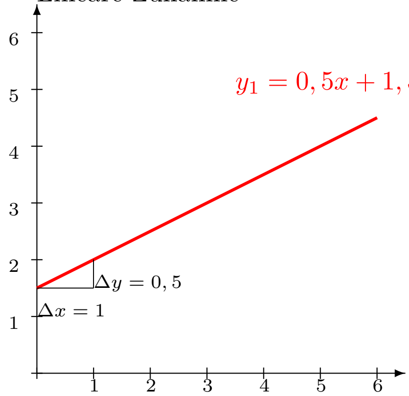
$f(x) = |x|$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$f(x) = a|b(x-c)| + d \; \mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

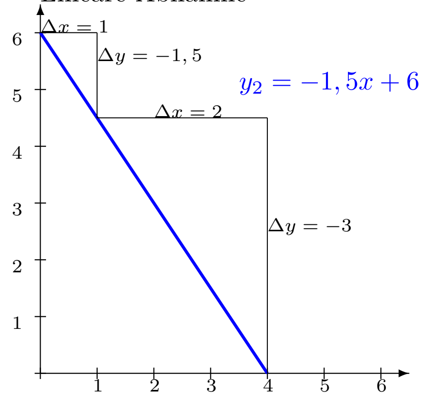
3.12 Wachstumsfunktionen

3.12.1 Lineares Wachstum

Lineare Zunahme



Lineare Abnahme



• Zum Anfangswert t wird pro Zeiteinheit der gleiche Wert m addiert oder subtrahiert.

• Lineare Funktion: $y = m \cdot x + t$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

y - Funktionswert nach der Zeit x

t - Anfangswert

m - konstante Änderungsrate, Steigung

$m > 0$ positives lineares Wachstum (Zunahme)

$m < 0$ negatives lineares Wachstum (Abnahme)

$m = 0$ Nullwachstum

• Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

• Umformungen: $y = m \cdot x + t$

$x = \frac{y-t}{m}$ $t = y - m \cdot x$ $m = \frac{y-t}{x}$

• Schreibweisen

Funktion	Änderungsrate	Variable	Anfangswert
$y = m \cdot x + t$	m	x	t
$y = a \cdot x + b$	a	x	b
$y = a + b \cdot x$	b	x	a
$f(x) = a \cdot x + f_0$	a	x	f_0
$N(t) = a \cdot t + N_0$	a	t	N_0
$B(t) = k \cdot t + B_0$	a	x	B_0
$K(t) = q \cdot t + K_0$	q	t	K_0

Lineare Zunahme

Ein Wasserbecken entält 1,5 Liter Wasser. Pro Minute fließen 0,5 Liter zu.

x_1= Minuten y_1= Liter $t = 1,5$

x_1	0	1	2	3	4
y_1	$1,5$	$1,5 + 0,5$	$2 + 0,5$	$2,5 + 0,5$	$3 + 0,5$
y_1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1,5}{1-0} = \frac{0,5}{1} = 0,5$

$y = 0,5x + 1,5$

Lineare Abnahme

Ein Wasserbecken entält 6 Liter Wasser. Pro Minute fließen 1,5 Liter ab.

x_2= Minuten y_2= Liter

x_2	0	1	2	3	4
y_2	6	$6 - 1,5$	$4,5 - 1,5$	$3 - 1,5$	$1,5 - 1,5$
y_2	6	$4,5$	3	$1,5$	0

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5-6}{1-0} = \frac{-1,5}{1} = -1,5$

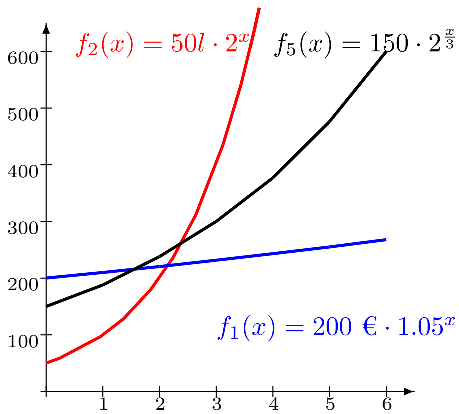
$y = -1,5x + 6$

Interaktive Inhalte:

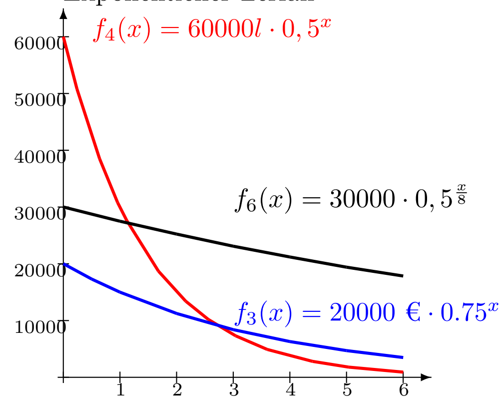
Funktionsgraph | Wertetable | Eigenschaften | $y = m \cdot x + t$ | $m = \frac{y-t}{x}$ | $x = \frac{y-t}{m}$ | $t = y - m \cdot x$

3.12.2 Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall



Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

• Der Anfangswert a wird pro Zeiteinheit mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^x$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

q - Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

•Prozentuale Zunahme p pro Zeiteinheit:

$f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^x = a \cdot q^x$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $p = (q - 1) \cdot 100$

•Prozentuale Abnahme p pro Zeiteinheit:

$f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x = a \cdot q^x$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $p = (1 - q) \cdot 100$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit:

1. Ableitung: $f'(x) = a \cdot ln(q) \cdot q^x$

• Umformungen $y = f(x)$

$y = a \cdot q^x$ $a = \frac{y}{q^x}$ $x = log_q(\frac{y}{a})$ $q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$

• Schreibweisen

Funktion	Wachstumsfaktor	Variable	Anfangswert
$f(t) = a \cdot q^t$	q	t	a
$y = a \cdot b^x$	b	x	a
$y = b \cdot a^t$	a	t	b
$K(t) = K_0 \cdot q^t$	q	t	N_0
$N(t) = N_0 \cdot q^t$	q	t	N_0

Exponentielle Zunahme

Ein Kapital von 200 € wird mit 5 % (pro Jahr) verzinst.

x_1= Jahr y_1=€ p=5 $q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$ $a = 200$ €

x_1	0	1	2	3	4
y_1	200	$200 \cdot 1,05$	$210 \cdot 1,05$	$220,5 \cdot 1,05$	$231,52 \cdot 1,05$
y_1	200	210	$220,5$	$231,52$	$243,1$

$f_1(x) = 200€ \cdot (1 + \frac{5}{100})^x$ $f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$

Kapital nach 10 Jahren:$f_1(10) = 200€ \cdot 1,05^{10} = 325,78€$

In jeder Minute verdoppelt sich die Wassermenge in einem Wasserbecken. Nach 4 Minuten enthält es 800 Liter Wasser.

$q = 2$ $f(4) = 800$

Prozentuale Zunahme: $p = (2 - 1) \cdot 100\% = 100\%$

Anfangswert: $a = \frac{y}{q^x} = \frac{800}{2^4} = 50l$

$f_2(x) = 50€ \cdot 2^x$ $f_2(x) = 50 \cdot (1 + \frac{100}{100})^x$

Exponentielle Abnahme

Ein Auto kostet 20000 €. Der Wertverlust beträgt 25 % pro Jahr.

x= Jahre y_3=€

x	0	1	2	3	4
y_3	20000	$20000 \cdot 0,75$	$25000 \cdot 0,75$	$11250 \cdot 0,5$	$8437,50 \cdot 0,75$
y_3	20000	25000	11250	$8437,50$	$6328,12$

$f_3(x) = 20000€ \cdot (1 - \frac{25}{100})^x$ $f_3(x) = 20000€ \cdot 0,75^x$

Wann ist das Auto nur noch 1000 € Wert?

$x = log_q(\frac{y}{a}) = log_0,75(\frac{1000€}{20000€}) = 19,41$ Jahren

Ein Wasserbecken enthält 60000 Liter Wasser.

Pro Minute halbiert sich die Wassermenge.

x_4= Minuten y_4= Liter

x_4	0	1	2	3	4
y_4	60000	$60000 \cdot 0,5$	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$
y_4	60000	30000	15000	7500	3750

$f_4(x) = 60000l \cdot 0,5^x$ $f_4(x) = 60000l \cdot (1 - \frac{50}{100})^x$

Wachstumsfaktor pro Periode

• Der Anfangswert a wird pro Periode mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

T - Periode, Zeitintervall

q - Wachstumsfaktor pro Periode

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

• Prozentuale Zunahme p pro Periode T:

$f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^{\frac{x}{T}}$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $p = (q - 1) \cdot 100$

• Prozentuale Abnahme pro Periode T:

$f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^{\frac{x}{T}}$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $p = (1 - q) \cdot 100$

• Umformungen $y = f(x)$

$y = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$ $a = \frac{y}{q^{\frac{x}{T}}}$ $x = T \cdot log_q(\frac{y}{a})$ $q = \sqrt[\frac{x}{T}]{\frac{y}{a}}$

Exponentielles Wachstum

Zu Beginn der Beobachtung sind 150 Bakterien vorhanden. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 3 Stunden.

q=2 T=3 $a = 150$

x_5= Stunden y_5=Anzahl der Bakterien

x_5	0	3	6	9	12
y_5	150	$150 \cdot 2$	$300 \cdot 2$	$600 \cdot 2$	$1200 \cdot 2$
y_1	150	300	600	1200	2400

$f_5(x) = 150 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$

Anzahl der Bakterien nach 2 Stunden:

$f_5(2) = 150 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 238$

Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Am Anfang sind 30000 Atome vorhanden.

q=0,5 T=8 $a = 30000$

x_6= Tage y_6= Anzahl der Atome

x_6	0	8	16	24	32
y_6	30000	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$	$37500 \cdot 0,5$
y_6	30000	15000	7500	3750	1875

$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$ $f_6(x) = 30000 \cdot (1 - \frac{50}{100})^{\frac{x}{8}}$

Wachstumskonstante und e-Funktion

•Funktion: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

f(x) - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

k - Wachstumskonstante

$k > 0$ exponentielles Wachstum

$k < 0$ exponentieller Zerfall

• Wachstumsfaktor q pro Zeiteinheit:

$f(x) = a \cdot q^x = a \cdot e^{ln(q^x)} = a \cdot e^{ln(q) \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}$

$k = ln(q) \qquad q = e^k$

• Wachstumsfaktor q pro Periode T:

$f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}} = a \cdot e^{ln(q^{\frac{x}{T}})} = a \cdot e^{ln(q) \cdot \frac{x}{T}} = a \cdot e^{k \cdot x}$

$k = \frac{ln(q)}{T} \qquad q = e^{k \cdot T}$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit:

1. Ableitung: $f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$

• Umformungen: $y = f(x)$

$y = a \cdot e^{k \cdot x} \qquad a = \frac{y}{e^{k \cdot x}} \qquad x = \frac{ln(\frac{y}{a})}{k} \qquad k = \frac{ln(\frac{y}{a})}{x}$

Wachstumkonstante?

$f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$

$k = ln(q) = ln(1,05) = 0,0488$

$f_1(x) = 200€ \cdot e^{ln(1,05)x} \qquad f_1(x) = 200€ \cdot e^{0,0488x}$

$f_1(10) = 200€ \cdot e^{ln(1,05)10} = 325,78$

Wachstumkonstante?

$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$

$k = \frac{ln(q)}{T} = \frac{ln(0,5)}{8} = -0,087$

$f_6(x) = 30000 \cdot e^{\frac{ln(0,5)}{8}x} \qquad f_6(x) = 30000 \cdot e^{-0,087x}$

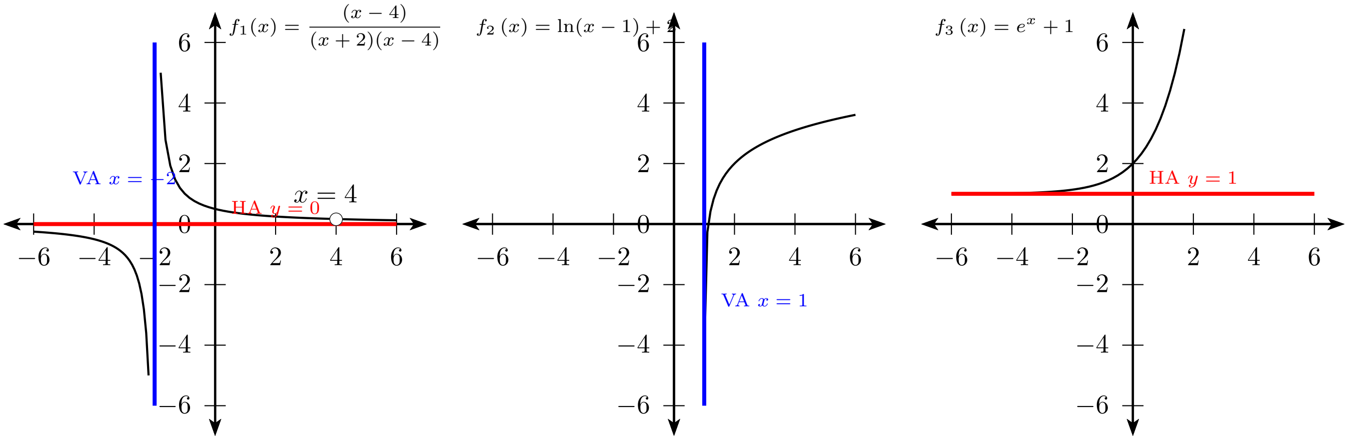
Interaktive Inhalte:

$p = (q-1) \cdot 100$ | $q = 1 + \frac{p}{100}$ | $f(x) = a \cdot q^x$ | $a = \frac{f(x)}{q^x}$ | $x = log_q(\frac{y}{a})$ | $q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$

4 Analysis

4.1 Grenzwert - Stetigkeit

4.1.1 Grenzwert von f(x) für x gegen x0



• Linksseitiger Grenzwert (LGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = a$ oder $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = a$

• Rechtsseitiger Grenzwert (RGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$ oder $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = a$

• Grenzwert von f(x) existiert

linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = a$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

• Linksseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

• Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ vertikale Asymptote - Polstelle an der Stelle $x = x_0$

$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \to 4^-$	$f(x) \to \frac{1}{6}$
$3,99$	$0,166945$
$3,999$	$0,166694$
$3,9999$	$0,166669$
$3,99999$	$0,166667$

$\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \to 4^+$	$f(x) \to \frac{1}{6}$
$4,01$	$0,166389$
$4,001$	$0,166639$
$4,0001$	$0,166664$
$4,00001$	$0,166666$

$\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \frac{1}{6} \Rightarrow$ Stetig behebbare Definitionslücke

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \to -2^-$	$f(x) \to -\infty$
$-2,01$	-100
$-2,001$	-1000
$-2,0001$	-10000
$-2,00001$	$-99999,999999$

$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \to -2^+$	$f(x) \to \infty$
$-1,99$	100
$-1,999$	1000
$-1,9999$	10000
$-1,99999$	$99999,999999$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} =$
$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \ln(x-1) + 2 = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 1$

Interaktive Inhalte:
Grenzwerte

4.1.2 Grenzwert von f(x) für x gegen Unendlich

- Grenzwert von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$

$\Rightarrow$ horizontale Asymptote $y = a$

- Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Funktion:

$f(x) = -x^3$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x \to \infty$	$f(x) \to -\infty$
10	-1000
100	-1000000
1000	-1000000000
10000	-1000000000000

$x \to -\infty$	$f(x) \to \infty$
-10	1000
-100	1000000
-1000	1000000000
-10000	1000000000000

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = [-1\cdot\infty^3] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} -x^3 = [-1\cdot(-\infty)^3] = \infty$

$f(x) = \dfrac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x \to \infty$	$f(x) \to 0$
10	$0,083333$
100	$0,009804$
1000	$0,000998$
10000	$0,0001$
100000	$0,00001$

$x \to -\infty$	$f(x) \to 0$
-10	$-0,125$
-100	$-0,010204$
-1000	$-0,001002$
-10000	$-0,0001$
-100000	$-0,00001$

$$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-4}{x^2-2x-4} = \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$f_2(x) = \ln(x-1) + 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x-1) + 2 = \infty$

$f_3(x) = e^x + 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x + 1 = \infty$

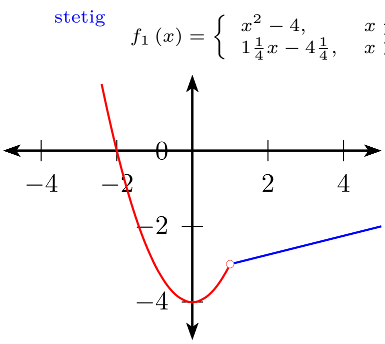
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1$

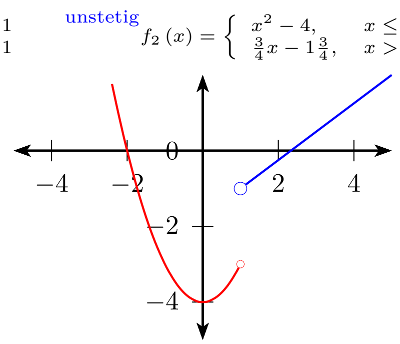
Horizontale Asymptote: $y = 1$

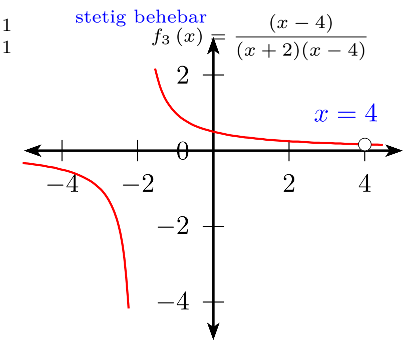
Interaktive Inhalte:

Grenzwerte

4.1.3 Stetigkeit







• Ein Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der linksseitiger GW = rechtsseitiger GW = Funktionswert f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

• Stetige Funktionen
- Ganzrationale Funktionen
- Exponentialfunktionen
- Sinus- und Kosinusfunktion

• Stetige Funktionen, bei denen die Unstetigkeitsstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind:
- Gebrochenrationale Funktionen
- Logarithmusfunktionen
- Tangensfunktion

• Abschnittsweise definierte Funktionen müssen an den Schnittstellen auf Stetigkeit untersucht werden.

• Stetig behebbare Definitionslücke x_0
- linksseitiger GW = rechtsseitiger GW

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$

RGW: $\lim\limits_{x \to 1^+} 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4} = -3$

FW: $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$

LGW = RGW = FW $\Rightarrow$
ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

LGW: $\lim\limits_{x \to 1^-} x^2 - 4 = -3$

RGW: $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4} = -1$

FW: $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$

LGW $\neq$ RGW $\neq$ FW $\Rightarrow$
ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1$

$$f_3(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{(x+2)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

$f_3(x)$ stetig in D

RGW: $\lim\limits_{x \to 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

LGW: $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$

$RGW = LGW$

$\Rightarrow$ stetig behebbare Definitionslücke: $x_0 = 4$
Stetige Fortsetzung von $f_2(x)$

$$f_4(x) = \frac{1}{(x+2)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Interaktive Inhalte:
Grenzwerte

4.1.4 Rechenregeln

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to 0} a \cdot x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{a}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} a \cdot x = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{a}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} 4 \cdot x = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to \infty} 7 \cdot x = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{-3}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} 2e^x = \infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} -3e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 3\ln x = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} 6\ln x = \infty$

Rechenregeln

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f$ $\qquad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f + g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f - g$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = f \cdot g$

$g(x) \neq 0 \qquad \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f}{g}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{x(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2})} = 0$$

Zähler:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 - 0 = 1$

Nenner:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} x(1 - 0 - 0) = \infty$

Zähler durch Nenner: $\frac{1}{\infty} = 0$

Unbestimmte Ausdrücke

Typ 1: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ Typ 2: $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Regel von L'Hospital

Zähler und Nenner getrennt ableiten, bis man den Grenzwert berechnen kann.

$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)}...$

Typ 3: $\lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$

- Umformen in Typ 1 oder 2 und danach L'Hospital anwenden

Typ 4: $\lim (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$

- Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringen
- Faktorisieren

Typ 1: $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$

Typ 2: $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2 \cdot x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$

Typ 3: $\infty \cdot 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$

Typ 4: $\infty - \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - x = \lim\limits_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-x}{x^2} = \infty$

Wichtige unbestimmte Ausdrücke

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

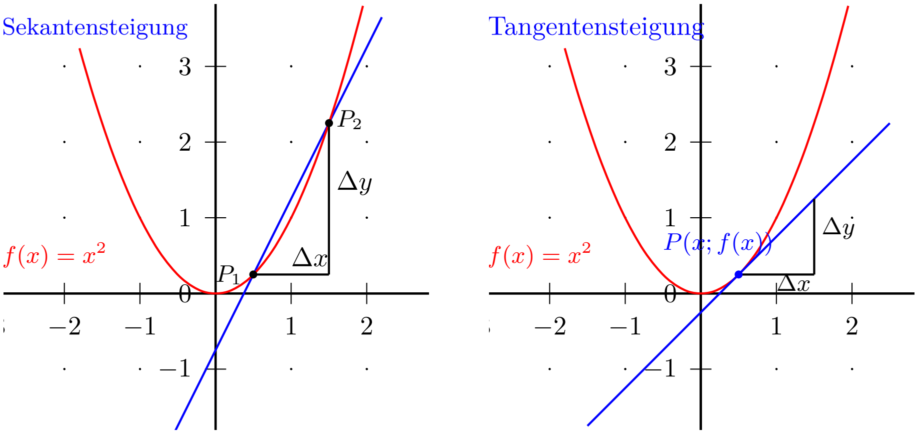
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-4x^5}{e^x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3}{\ln x} = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$

4.2 Differentialrechnung

4.2.1 Definition



Sekantensteigung

Eine Gerade schneidet eine Funktion in den Punkten $P_1(x_0; f(x_0))$ und $P_2(x; f(x))$.
Steigung der Sekante an der Stelle x_0
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$\Delta x = h \qquad x = x_0 + h$
$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
Sekantensteigung = Differenzenquotient = Mittlere Änderungsrate
Für kleine h ist die Sekantensteigung ≈ Tangentensteigung
$m \approx f'(x_0)$

$f(x) = x^2$
Die Sekantensteigung m durch die Punkte
$P_1(0.5; 0,25) \qquad P_2(1,5; 2,25)$
$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$m = \frac{2,25 - 0,25}{1,5 - 0,5} = 2$
Die Sekantensteigung m an der Stelle $x_0 = 0,5$ und $h = 1$
$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
$m = \frac{f(0,5 + 1) - f(0,5)}{1}$
$m = \frac{2.25 - 0,25}{1} = 2$
Die Sekantensteigung m an der Stelle $x_0 = 0,25$ und $h = 0,001$
$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
$m = \frac{f(0,5 + 0,001) - f(0,5)}{0,001}$
$m = \frac{0,251001 - 0,25}{0,001} = 1,001$
$m \approx f'(0,5) = 1$

1. Ableitung - Differentialqoutient

Die Ableitung von $f(x)$ ist die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0.
$f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
$x = x_0 + h$
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
1. Ableitung = Steigung der Tangente = Steigung der Funktion f(x)=lokale (momentane) Änderungsrate
Die Ableitung von $f(x)$ an der beliebigen Stelle x
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Die 1. Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 0,5$
$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(0,5 + h)^2 - 0,5^2}{h}$
$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{0,25 + h + h^2 - 0,25}{h}$
$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(1 + h)}{h}$
$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} 1 + h = 1$
Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an einer beliebigen Stelle x
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 2x + h = 2x$
$f'(x) = 2x$
$f'(0,5) = 1$

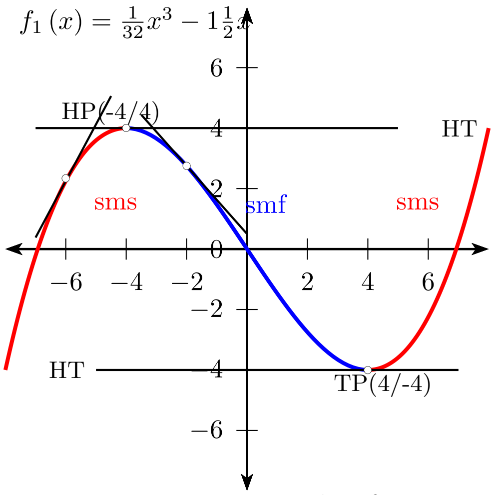
2. Ableitung

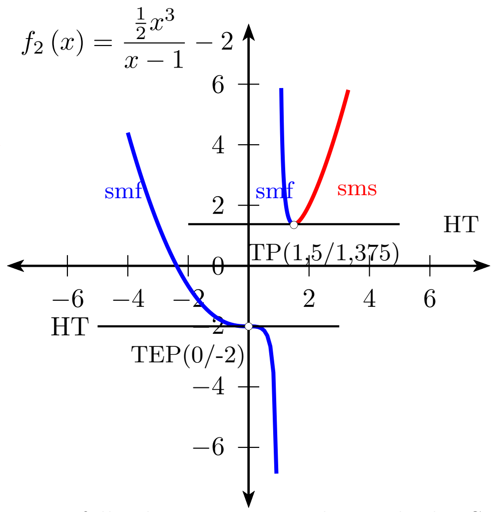
Die Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.
Die 2. Ableitung gibt die Krümmung einer Funktion f(x) an der Stelle x_0 an.

$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$
$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2$
$f''(x) = -12x^2 + 6$

Interaktive Inhalte:
Tangentensteigung

4.2.2 1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte





sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt

Steigung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

$m = f'(x_0)$

•Funktion
$f(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
Steigung an der Stelle $x = -6$
$m = f'(-6) = 1\frac{7}{8}$
Steigung an der Stelle $x = -2$
$f'(-2) = -1\frac{1}{8}$

Stelle x_0 an der $f(x_0)$ die Steigung m besitzt

$f'(x) = m$
Bei horizontalen Tangenten ist die Steigung Null.
$f'(x) = 0$

•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$
Horizontale Tangente
$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \qquad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

Monotonieverhalten

monoton steigend		$f'(x) \geq 0$
streng monoton steigend	sms	$f'(x) > 0$
monoton fallend		$f'(x) \leq 0$
streng monoton fallend	smf	$f'(x) < 0$

Das Monotonieverhalten kann sich nur an den Extremstellen und an den Rändern des Definitionbereichs (Definitionslücken) ändern.

Monotonieverhalten an der Stelle $x = -6$
$m = f'(-6) = 1\frac{7}{8} > 0 \Rightarrow$ sms
Monotonieverhalten an der Stelle $x = -2$
$f'(-2) = -1\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow$ smf

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).
Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Funktion
$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$

$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \qquad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$
• Vorzeichentabelle von $f'(x)$

	$x <$	-4	$< x <$	4	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$Graph$	sms	HP	smf	TP	sms

Hochpunkt:$(-4/4)$ Tiefpunkt:$(4/-4)$
•Monotonieverhalten
$x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f'(x) > 0$ sms
$x \in]-4; 4[\quad f'(x) < 0$ smf

•Funktion
$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x-1} - 2$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x^2 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}x^3 \cdot 1}{(x-1)^2}$
$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}x^3}{(x-1)^2}$
$= \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$
Zähler $= 0$
$x^2(x - 1\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x - 1\frac{1}{2} = 0$
$x - 1\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 1\frac{1}{2}$
$x = 1\frac{1}{2}$
$x_0 = 0$; 2-fache Nullstelle
$x_1 = 1\frac{1}{2}$; 1-fache Nullstelle
Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen$x_3 = 1$

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
Graph	smf	TEP	smf		smf	HP	sms

TEP(0/0) TP$(1\frac{1}{2}/1\frac{3}{8})$
•Monotonieverhalten
$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0$ smf
$x \in]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0$ sms

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

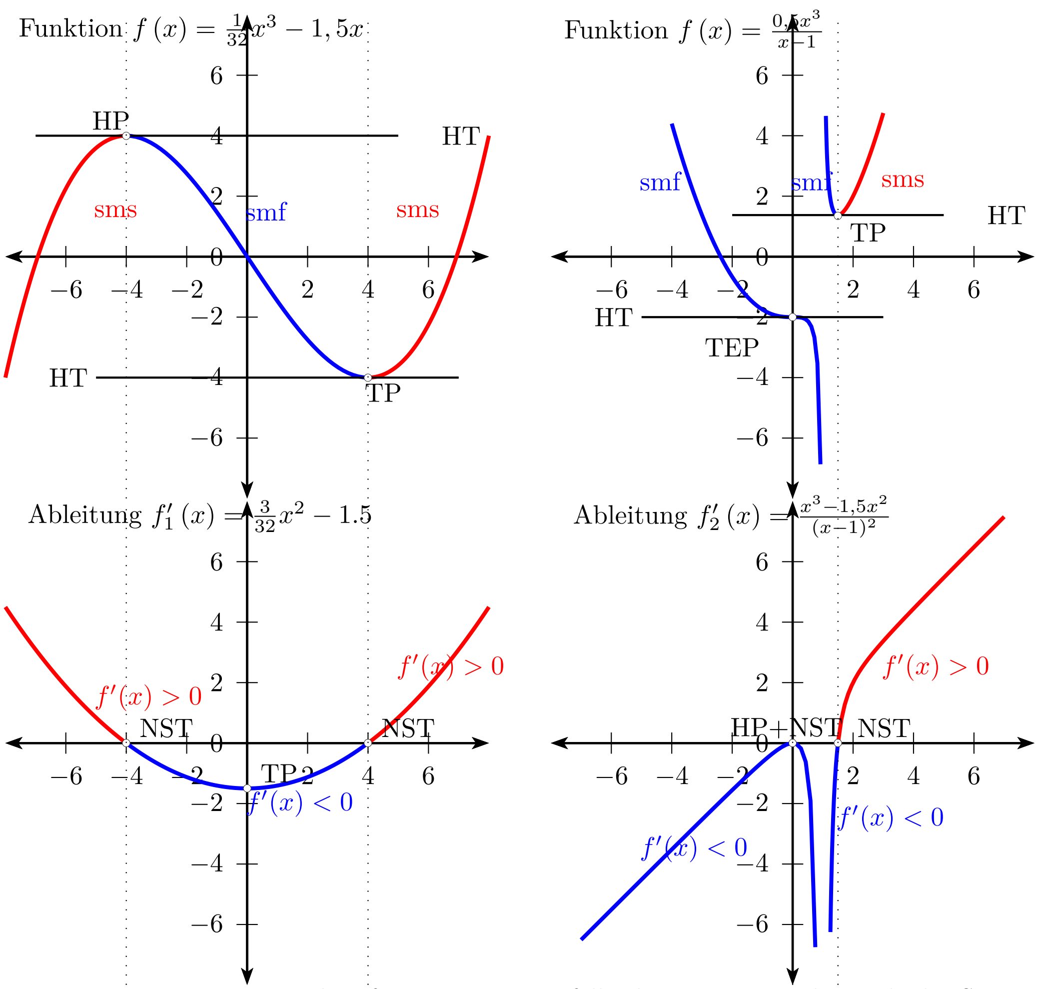
Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung).

- $f''(x_0) > 0(LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0(RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

•Funktion
$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
•1. Ableitungen
$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$
•2. Ableitungen
$f''(x) = \frac{3}{16}x$
•$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$
$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$
$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$
$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$
$f''(-4) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{HP}(-4/4)$
$f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{TP}(4/-4)$

Interaktive Inhalte:
Kurvendiskussion

4.2.3 Graph der 1. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt; PS - Punktsymmetrie zum Ursprung; AS - Achsensymmetrie zur y-Achse

Funktion - 1. Ableitung f'(x)

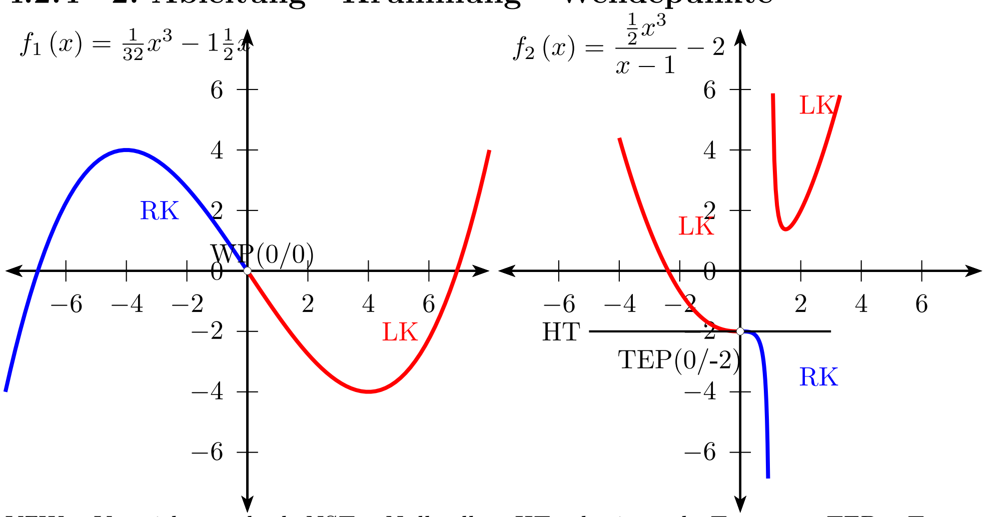
Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Extremwert	NST $f'(x) = 0$
HT	NST $f'(x) = 0$
HP	NST und VZW von $+$ nach $-$
TP	NST und VZW von $-$ nach $+$
TEP	NST ohne VZW
WP	Extremwert
sms	$f'(x) > 0$ (positiv)
smf	$f'(x) < 0$ (negativ)
VA	VA $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$
HA	HA $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$
PS	AS
AS	PS

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x \quad f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$

$f_1(x)$	$f_1'(x)$
Extremwert: $x = -4$	NST $x = -4$
HP:$x = -4$	VZW von + nach - $x = -4$
WP: $x = 0$	Extremwert: $x = 0$
sms: $x < -4$	$f(x) > 0 \quad x < -4$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.2.4 2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte



VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Krümmung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

Rechtskrümmung	RK	$f''(x) < 0$
Linkskrümmung	LK	$f''(x) > 0$

Das Krümmungsverhalten kann sich nur an den Nullstellen der 2. Ableitung und an den Rändern des Definitionbereichs (Definitionslücken) ändern.

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen (Hinreichende Bedingung). Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$

$f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$

•2. Ableitungen

$f_1''(x) = \frac{3}{16}x$

$f_1''(x) = \frac{3}{16}x = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

WP(0/0)

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ LK

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad$ RK

•Funktion

$f_2(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3}{x-1}$

$f_2'(x) == \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$

•2. Ableitungen

$f_2''(x) = \frac{(x^2 - 3x + 3)x}{(x-1)^3} \qquad$ Zähler =0

$x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 3 = 0$

$x^2 - 3x + 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_9 = 0;\quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_{10} = 1;\quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK		RK

WP(0/−2) kein WP $x = 1$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ LK

$x \in]0; 1[\quad f''(x) < 0 \quad$ RK

Wendepunkte und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

•Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$

•1. Ableitungen

$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$

•2. Ableitungen

$f''(x) = \frac{3}{16}x$

•3. Ableitungen

$f'''(x) = \frac{3}{16}$

$f''(x) = \frac{3}{16}x = 0$

$x = 0$

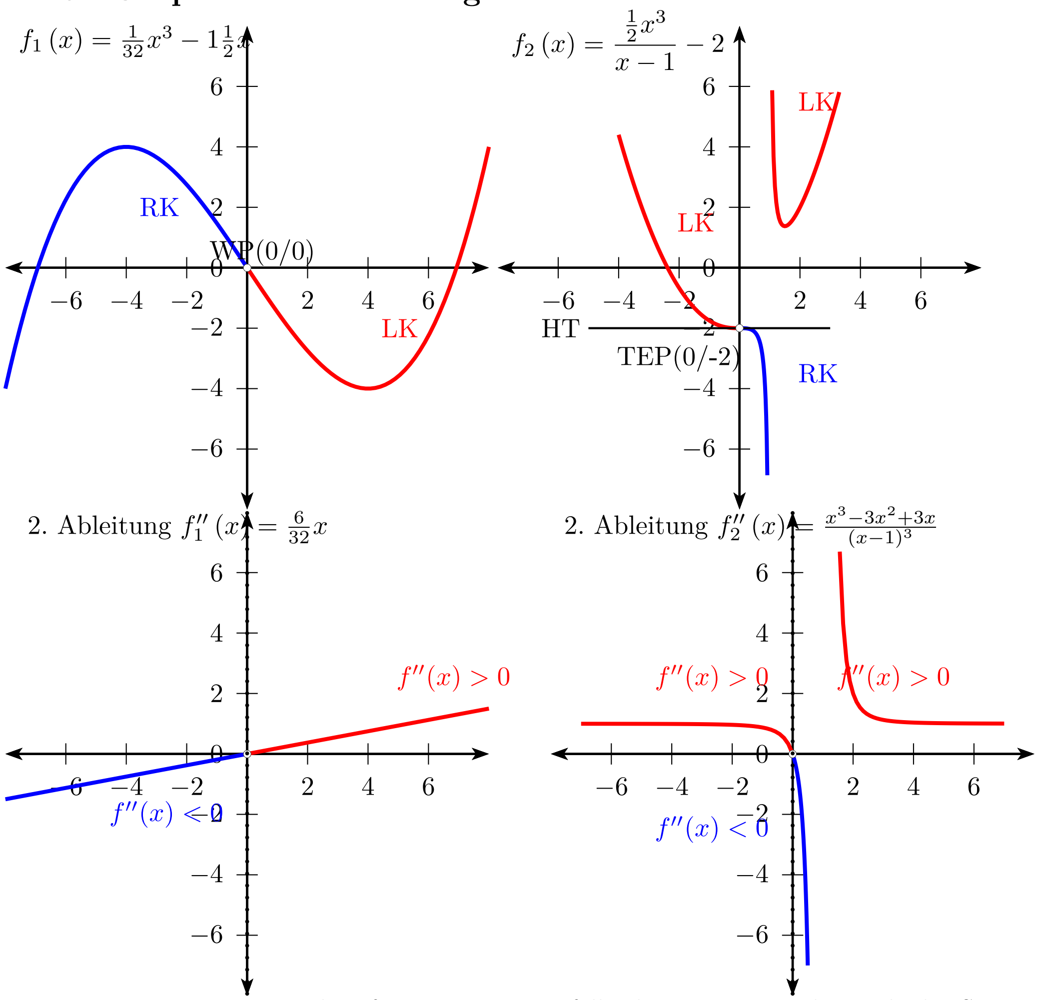
$f'''(0) = \frac{3}{16} \neq 0 \Rightarrow$

Wp(0/0)

Interaktive Inhalte:

Kurvendiskussion

4.2.5 Graph der 2. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Funktion - 2. Ableitung f"(x)

Funktion $f(x)$	2. Ableitung $f''(x)$
WP	NST $f''(x) = 0$ mit VZW
LK	$f''(x) > 0$
RK	$f''(x) < 0$
TEP	NST mit VZW
VA	VA
HA	HA

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.2.6 Ableitung der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}$

Die Ableitungen bildet man durch:

Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = ax \qquad f'(x) = a$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$f(x) = a \qquad f'(x) = 0$

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln abgeleitet

$f_1(x) = x^5 \qquad f_1'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$
$f_2(x) = 8x^5 \qquad f_2'(x) = 8 \cdot 5x^{5-1} = 40x^4$
$f_3(x) = 2x \qquad f_3'(x) = 2$
$f_4(x) = 5 \qquad f_4'(x) = 0$
$f_5(x) = x^5 + x^4 + x + 3 \qquad f_5'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$
$f_5''(x) = 20x^3 + 12x^2$

Exponentialfunktion Basis e

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

$f(x) = ae^x \qquad f'(x) = ae^x$

$f(x) = ae^x + b \qquad f'(x) = ae^x$

$f(x) = 3e^x + 4 \qquad f'(x) = 3e^x$

Logarithmusfunktion Basis e

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = a \ln x \qquad f'(x) = \frac{a}{x}$

$f(x) = a \ln x + b \qquad f'(x) = \frac{a}{x}$

$f(x) = 4 \ln x + 5 \qquad f'(x) = \frac{4}{x}$

Exponentialfunktion allgemein

$f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \ln a$

$f(x) = 3^x \qquad f'(x) = 3^x \ln 3$

Logarithmusfunktion allgemein

$f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$

$f(x) = \log_4 x \qquad f'(x) = \frac{1}{x \ln 4}$

Trigonometrische Funktionen

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x \qquad f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$

Interaktive Inhalte:
Ableitung

4.2.7 Ableitungsregeln

Ableiten von Summen und Differenzen

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$f_1(x) = x^5 + x^4 + x + 3$
$f_1'(x) = 5x^4 + 4x^3 + 1$
$f_1''(x) = 20x^3 + 12x^2$
$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x$
$f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$

Ableiten mit konstantem Faktor

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

$f_1(x) = 5e^x + 4\ln x$
$f_1'(x) = 5e^x + 4\frac{1}{x}$
$f_2(x) = 5\cos x + 4\sin x$
$f_2'(x) = -5\sin x + 4\cos x$

Kettenregel

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- äußere Funktion f() ableiten
- innere Funktion g(x) unabgeleitet abschreiben
- mit der Ableitung der inneren Funktion g(x) multiplizieren (nachdifferenzieren)

$f_1(x) = e^{2x}$
äußere Funktion: $e^{(..)}$ innnere Funktion: $2x$
$f_1'(x) = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}$
$f_2(x) = 3\sin 5x$
äußere Funktion: $sin(..)$ innnere Funktion: $5x$
$f_2'(x) = 3\cos 5x \cdot 5 = 15\cos 5x$
$f_3(x) = 5e^{3x^3}$
äußere Funktion: e innnere Funktion: $3x^3$
$f_3'(x) = 5e^{3x^3} \cdot 9x^2 = 45x^2e^{3x^3}$
$f_4(x) = (x^3 - x)^7$
äußere Funktion: $(...)^7$ innnere Funktion: $x^3 - x$
$f_4'(x) = 7(x^3 - x)^6 \cdot (3x^2 - 1) = (21x^2 - 7)(x^3 - x)^6$

Produktregel

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- 1. Faktor f(x) ableiten
- mal
- 2. Faktor g(x) unabgeleitet
- plus
- 1. Faktor f(x) unabgeleitet
- mal
- 2. Faktor g(x) abgeleitet

$f_1(x) = x^2e^x$
$f_1'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
$f_1'(x) = xe^x(2 + x)$
$f_2(x) = (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x$
$f_2'(x) = (2 \cdot x - 6) \cdot e^x + (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x$
$f_2'(x) = e^x(2x - 6 + x^2 - 6x + 2)$
$f_2'(x) = e^x(x^2 - 4x - 4)$

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Zähler f(x) ableiten
- mal
- Nenner g(x) unabgeleitet
- minus
- Zähler f(x) unabgeleitet
- mal
- Nenner g(x) abgeleitet
- durch
- Nenner g(x) im Quadrat

$f\,(x) = \dfrac{3x-1}{x^2}$ $\qquad f'\,(x) = \dfrac{3\cdot x^2 - (3x-1)\cdot 2x}{(x^2)^2}$

$f'\,(x) = \frac{3x^2-(6x^2-2x)}{x^4}$

$f'\,(x) = \frac{-3x^2+2x}{(x^4)}$

$f'\,(x) = \dfrac{-3x(x-\frac{2}{3})}{x^4}$

$f'\,(x) = \dfrac{-3(x-\frac{2}{3})}{x^3}$

$f'\,(x) = \dfrac{-3x+2}{x^3}$

4.2.8 Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung

Tangente an der Stelle x_0:

$g(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

oder

$y_0 = f(x_0)$

$m_t = f'(x_0)$

Geradengleichung:

$y = m\cdot x + t$

m_t, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$t = y_0 - m_t\cdot x_0$

m_t, t einsetzen

$y = m_t\cdot x + t$

Funktion
$f\,(x) = x^2$
$f'\,(x) = 2x$
Tangente an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
$f'(\frac{1}{2}) = 1$
$g(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$
$g(x) = f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$
$g(x) = 1(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
$g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$g(x) = x - \frac{1}{4}$

Normalengleichung

Normale an der Stelle x_0:

$g(x) = \dfrac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$

oder

$y_0 = f(x_0)$

$m_t = f'(x_0)$

Steigung der Normalen:

$m_n = \dfrac{-1}{m_t}$

Geradengleichung:

$y = m\cdot x + t$

m_n, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$t = y_0 - m_n\cdot x_0$

m_n, t einsetzen

$y = m_n\cdot x + t$

Funktion
$f\,(x) = x^2$
$f'\,(x) = 2x$
Normale an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$
$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
$f'(\frac{1}{2}) = 1$
$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$
$g(x) = \frac{-1}{f'(\frac{1}{2})}(x-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$
$g(x) = \frac{-1}{1}(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$
$g(x) = -1x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
$g(x) = -1x + \frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable $Tangentengleichung$

4.2.9 Newtonsches Iterationsverfahren

Nullstelle einer Funktion mit dem Newtonsches Iterationsverfahren berechnen.

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert x_0 wählen

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

....

Funktion

$f(x) = x^2 - 4,000$

$f'(x) = 2,000x$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Startwert: $x_0 = 1,000$

$f(1,000) = -3,000$

$f'(1,000) = 2,000$

$x_1 = 1,000 - \frac{f(1,000)}{f'(1,000)}$

$x_1 = 1,000 - \frac{-3,000}{2,000}$

$x_1 = 2,500$

$f(2,500) = 2,250$

$f'(2,500) = 5,000$

$x_2 = 2,500 - \frac{f(2,500)}{f'(2,500)}$

$x_2 = 2,500 - \frac{2,250}{5,000}$

$x_2 = 2,050$

$f(2,050) = 0,203$

$f'(2,050) = 4,100$

$x_3 = 2,050 - \frac{f(2,050)}{f'(2,050)}$

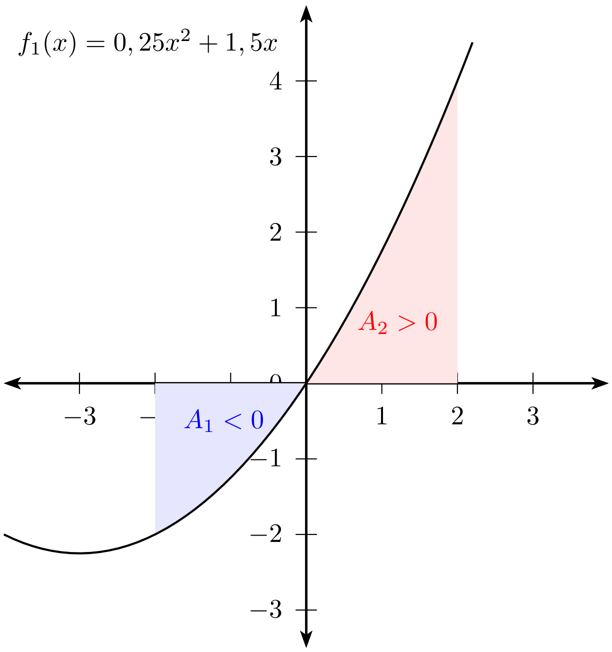
$x_3 = 2,050 - \frac{0,203}{4,100}$

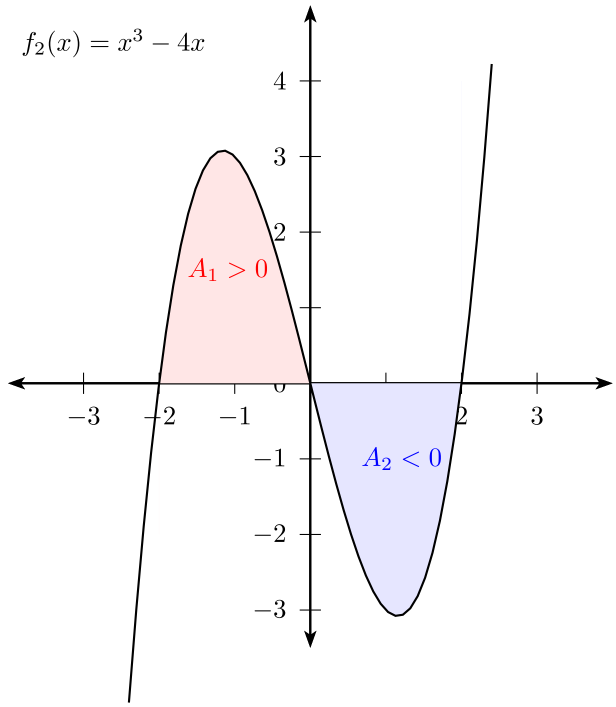
$x_3 = 2,001$

Interaktive Inhalte:
$Newtonverfahren$

4.3 Integralrechnung

4.3.1 Definition





Hauptsatz der Integralrechnung

$F'(x) = f(x)$

Die Ableitung von $F(x)$ ist $f(x)$

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$

Die Menge aller Stammfunktionen erhält man durch das Addieren einer Konstanten c.

$f(x) = ax^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$

$F_1(x) = x^2 + 2$
$F_1'(x) = 2x$
$F_1(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$
$F_2(x) = x^2 + 3$
$F_2'(x) = 2x$
$F_2(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = 2x$
Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = 2x$
$F(x) = x^2 + c$

Unbestimmtes Integral

$F(x) = \int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + c$

Die Stammfunktion zu einer Funktion f(x) ist das unbestimmte Integral.

$f(x) = 6x^2$
$F(x) = \int 6x^2\ \mathrm{dx} = 6 \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + c$
$F(x) = 2x^3 + c$
$F(x) = \int(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$

Bestimmtes Integral

• Flächenbilanz

$A = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

A ist der Flächeninhalt unter einer Kurve der Funktion f(x) im Integrationsbereich von a bis b.

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A > 0$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A < 0$

Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse $\Rightarrow$ Summe der Teilflächen

• Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse

- Nullstellen berechnen
- Flächen zwischen den Nullstellen berechnen
- Beträge der Flächen addieren

Funktion

$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x$

Stammfunktion

$F(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

Fläche unterhalb der x-Achse $\Rightarrow A_1 < 0$

$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{-2}^{0}$

$= \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2\right)$

$= (0) - \left(2\frac{1}{3}\right) = -2\frac{1}{3}$

Fläche oberhalb der x-Achse $\Rightarrow A_2 > 0$

$A_2 = \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{0}^{2}$

$= \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2\right)$

$= \left(3\frac{2}{3}\right) - (0) = 3\frac{2}{3}$

Fläche unterhalb und oberhalb der x-Achse $\Rightarrow$ Summe der Teilflächen

$A_3 = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right]_{-2}^{2}$

$= \left(\frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2\right)$

$= \left(3\frac{2}{3}\right) - \left(2\frac{1}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$

$A_3 = A_1 + A_2 = (-2\frac{1}{3}) + 3\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$

$f_2(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$

•Nullstellen: $x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$

$A_1 = \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$

$= \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2\right)$

$= (0) - (-4) = 4$

$A_2 = \int_{0}^{2} \left(x^3 - 4x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}$

$= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2\right)$

$= (-4) - (0) = -4$

•Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse:

$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 8$

Integralfunktion

$F(x) = \int_k^x f(t)\, dt = [F(t)]_k^x = F(x) - F(k)$

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

$F(k) = 0$

$F(x) = \int_{-2}^{x} \left(2t^2 + 4t\right) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + 2t^2\right]_{-2}^{x}$

$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2\right)$

$= \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3}$

$F(-2) = 0$

Interaktive Inhalte:

Stammfunktion *Integral*

4.3.2 Integration der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
Zum Exponenten 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.
$F(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$
$F(x) = \int ax^n \, dx = a\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$
Konstanter Faktor a bleibt erhalten.
$F(x) = \int a \, dx = ax + c$
$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) dx$$
Bei Summen wird jeder Summand einzeln integriert.

$F(x) = \int 4 \, dx = 4x + c$
$F_2(x) = \int (-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5) \, dx =$
$F_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{1+1} + 5x + c$
$F_2(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$

Exponentialfunktion Basis e

$F(x) = \int e^x \, dx = e^x + c$
$F(x) = \int ae^x \, dx = ae^x + c$
$F(x) = \int ae^x + b \, dx = ae^x + bx + c$

$F(x) = \int -3e^x + 2 \, dx = -3e^x + 2x + c$

Logarithmusfunktion Basis e

$F(x) = \int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$
$F(x) = \int a \ln x \, dx = a(x \ln x - x) + c$
$F(x) = \int a \ln x + b \, dx == a(x \ln x - x) + bx + c$

$F(x) = \int 7 \ln x + 2 \, dx == 7(x \ln x - x) + 2x + c$

Rationale Funktion mit linearer Funktion im Nenner

$F(x) = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$
$F(x) = \int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$

$F(x) = \int \frac{1}{x+1} \, dx = \ln |x + 1| + c$
$F(x) = \int \frac{1}{2x+3} \, dx = \frac{1}{2} \ln |2x + 3| + c$

Trigonometrische Funktionen

$F(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x + c$
$F(x) = \int \cos x \, dx = \sin x + c$

Interaktive Inhalte:
Stammfunktion

4.3.3 Integrationsregeln

Integration von Summen und Differenzen

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int f(x) + g(x)dx$$

Integration mit konstantem Faktor

$$\int c \cdot f(x)\mathrm{dx} = c\int f(x)\mathrm{dx}$$

Integration mit vertauschten Grenzen

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_b^a f(x)\ \mathrm{dx}$$

Integrationsgrenzen zusammenfassen

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} + \int_b^c f(x)\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\ \mathrm{dx}$$

Ableitung des Nenners im Zähler

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{dx} = \ln|f(x)| + c$$

$\int \frac{2x}{x^2}\ \mathrm{dx} = \ln|x^2| + c$
$\int \frac{-12x^2+5}{-4x^3+5x-2}\ \mathrm{dx} = \ln|-4x^3+5x-2| + c$

Innere Funktion ist der abgeleitete Faktor

$$\int g'(x)f(g(x))\ \mathrm{dx} = F(x) + c$$

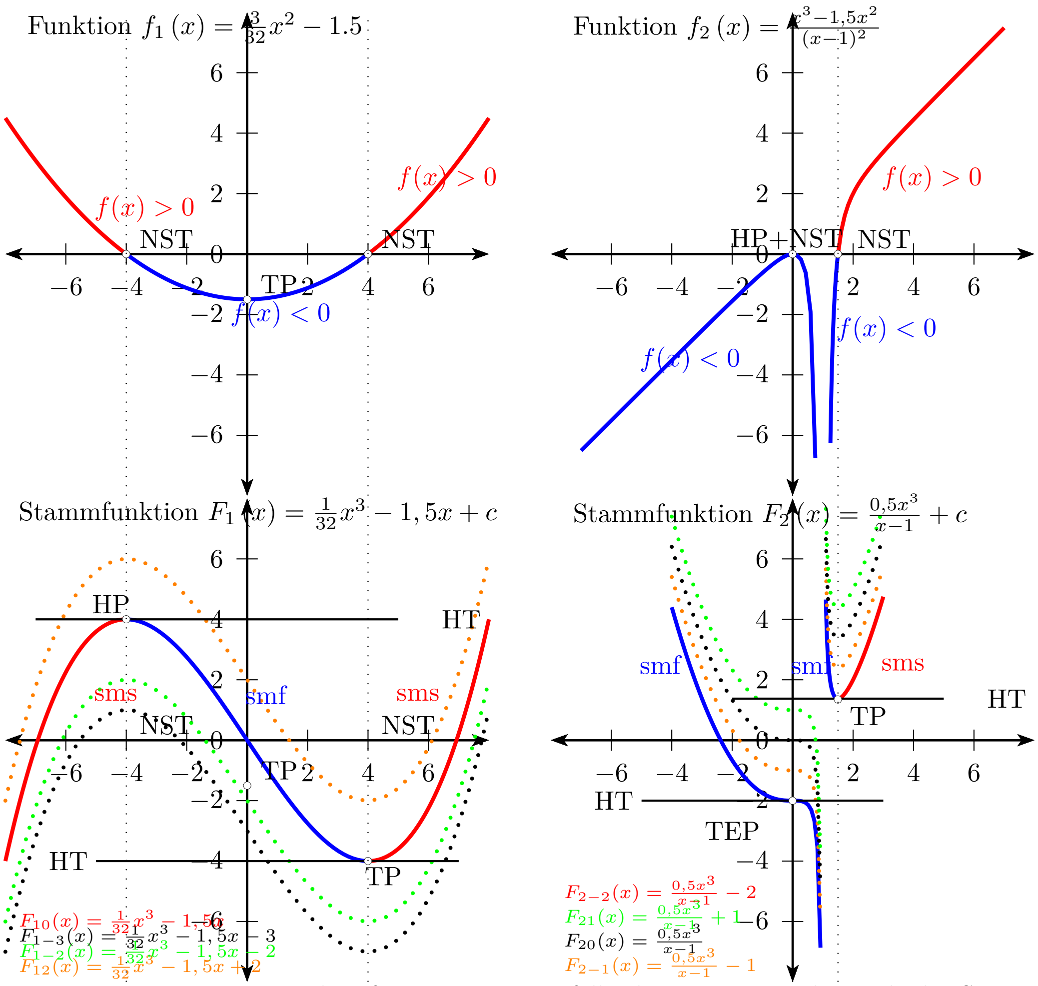
$\int 2x(x^2-3)^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}(x^2-3)^5 + c$
$\int 2xe^{x^2-3}\ \mathrm{dx} = e^{x^2-3} + c$
$\int 2x\sin(x^2-3)\ \mathrm{dx} = -\cos(x^2-3) + c$
$\int (3x^2-6x)e^{x^3-3x^2}\ \mathrm{dx} = e^{x^3-3x^2} + c$

Innere Funktion ist eine lineare Funktion

$$\int f(ax+b)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{a}F(x) + c$$

$\int (2x-6)^4\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(2x-3)^5 + c = \frac{1}{10}(2x-3)^5 + c$
$\int e^{2x-6}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}e^{2x-6} + c$
$\int \cos(-2x-6)\ \mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\sin(-2x-3) + c$
$\int \frac{1}{5x+3}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + c$

4.3.4 Graph der Stammfunktion



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt; PS - Punktsymmetrie zum Ursprung; AS - Achsensymmetrie zur y-Achse

Zu jeder Funktion f(x) gibt es eine Menge von Stammfunktionen F(x), die um c in y-Richtung verschoben sind.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
NST $f(x) = 0$	Extremwert (HT)
VZW von + nach −	HP
VZW von − nach +	TP
NST ohne VZW	TEP
Extremwert	WP
$f(x) > 0$ (positiv)	sms
$f(x) < 0$ (negativ)	smf
PS	AS
AS	PS

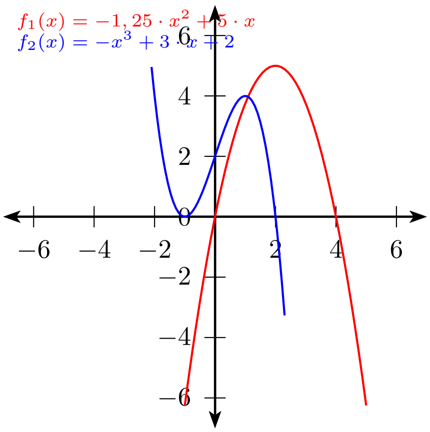
$f_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$
$F_1(x) = \int \frac{3}{32}x^2 - 1.5 \text{ dx} = \frac{1}{32}x^3 - 1.5x + c$
$F_{12}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x + 2 \quad F_{1-2}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 2$
$F_{1-3}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 3 \quad F_{10}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$

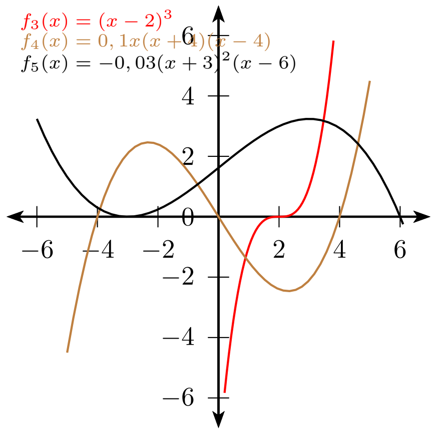
$f_1(x)$	$F_1(x)$
NST $x = -4$	Extremwert: $x = -4$
VZW von + nach - $x = -4$	HP:$x = -4$
Extremwert: $x = 0$	WP: $x = 0$
$f(x) > 0 \quad x < -4$	sms: $x < -4$

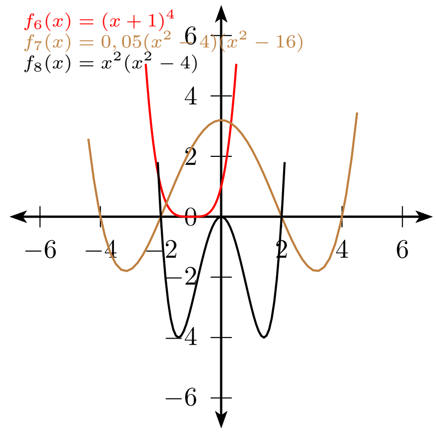
Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.4 Kurvendiskussion

4.4.1 Ganzrationale Funktion







Formen der Polynomfunktion - ganzrationale Funktion

- Summendarstellung der Polynomfunktion

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0$

oder

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} ...$

Die höchste Potenz (n) gibt den Grad der Polynomfunktion an.

- Produktdarstellung (faktorisierte Form) der Polynomfunktion

Ist der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der (reellen)Nullstellen, kann man die Funktion in faktorisierter Form schreiben.

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3 ...$

Linearfaktoren: $(x-x_1), (x-x_2)...$

a=Koeffizient der höchsten Potenz

Grad 1: Lineare Funktion

$f(x) = ax + b$

Grad 2: Quadratische Funktion

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Grad 3: Kubische Funktion

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$

Grad 5:

$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

Summen- in Produktdarstellung:

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$

$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$

$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$

$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorisierte Form:

$f_4(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$u_1 = 16 \qquad u_2 = 4$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_3 = 2 \qquad x_4 = -2$

Faktorisierte Form:

$f_7(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

Produkt- in Summendarstellung:

$f_3(x) = (x-2)(x-2)(x-2) = (x-2)^3$

$f_3(x) = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$

$f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$

$f_6(x) = (x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$f_7(x) = 0,05(x^2-4)(x^2-16) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$

$f_8(x) = x^2(x^2-4) = x^4 - 4x^2$

Definitions- und Wertebereich

• Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

• Wertebereich

- höchster Exponent ungerade:

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

- höchster Exponent gerade:

$\mathbb{W} =$ [absoluter Tiefpunkt;∞[

$\mathbb{W} =]-\infty$;absoluter Hochpunkt]

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$
absoluter Hochpunkt: (2/5) höchster Exponent: 2 (gerade Zahl)
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =]-\infty, 5[$
$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$
höchster Exponent: 3 (ungerade Zahl)
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f_5(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
absoluter Tiefpunkt aus der Kurvendiskussion:
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1\frac{4}{5}, \infty[$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

$f(x)$ hat nur ungerade Exponenten

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

$f(x)$ hat nur gerade Exponenten

$f_1(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_2(-x) = -1 \cdot 1(-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung
$f_4(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$
$f_4(-x) = 0,1(-x)^3 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x)$
$f_4(-x) = -\left(0,1 \cdot x^3 - 1\frac{3}{5} \cdot x\right)$
$f_4(-x) = -f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zum Ursprung
$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$
$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - 1 \cdot (-x)^2 + 3\frac{1}{5}$
$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot x^4 - 1 \cdot x^2 + 3\frac{1}{5}$
$f_7(-x) = f(x) \Rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

• Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.
(siehe Algebra-Gleichungen)
$f(x) = 0 \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2}... = 0$
• höchster Exponent ungerade
$1 \leqq$ Anzahl der Nullstellen $\leqq$ Grad des Polynoms
• höchster Exponent gerade
$0 \leqq$ Anzahl der Nullstellen $\leqq$ Grad des Polynoms
Faktorisierte Polynomfunktion

• Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.
$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)... = 0$
Nullstellen: $x_1, x_2, x_3...$

Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.
$f_3(x) = (x-2)^3 \qquad x_{123} = 2$ 3-fache Nullstelle
$f_5(x) = -0,03(x+3)^2(x-6)$
$x_1 = -3$ 2-fache Nullstelle
$x_{23} = 6$ 1-fache Nullstelle

Funktionsterm gleich Null setzen.
$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$
$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$
$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \quad \vee \quad x = 4$
$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$
Faktorisierte Form: $\quad f_1(x) = -1\frac{1}{4}x(x-4)$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:$x_1 = -1$

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & & +3x & +2 \quad) : (x+1) = -x^2 + x + 2 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & x^2 & +3x & +2 \\
 & -(x^2 & +x) & \\
\hline
 & & 2x & +2 \\
 & & -(2x & +2) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-x^2 + x + 2 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \quad \vee \quad x_2 = -1 \qquad x_3 = 2$$
Faktorisierte Form: $\quad f_2(x) = -(x+1)^2(x-2)$
$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$
$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$
$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$
Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3
Faktorisierte Form: $\quad f_5(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$
$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$
$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$
$u_1 = 16 \qquad u_2 = 4 \quad \vee$
$x^2 = 16 \quad x = \pm\sqrt{16} \quad x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$
$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} \quad x_3 = 2 \qquad x_4 = -2$
Faktorisierte Form: $\quad f_7(x) = \frac{1}{20}(x+4)(x-4)(x+2)(x-2)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ f(x)>0 Graph oberhalb der x-Achse

- f(x)<0 Graph unterhalb der x-Achse

$f_1\,(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0;4[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;2[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]2;\infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

Faktorisierte Form:

$f_5\,(x) = 0,1x(x+4)(x-4)$

Nullstellen:$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

$-5 < -4 \qquad f_5(-5) = -4,5$

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-4;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-4[\quad \cup \quad]0;4[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

Grenzwert - Verhalten im Unendlichen

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_1 x^1 + a_0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to\infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim\limits_{x\to-\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

$f_1\,(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$

Glied mit der höchsten Potenz: $-1\frac{1}{4}x^2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_1\,(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_1\,(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$

$f_2\,(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

Glied mit der höchsten Potenz: $-x^3$

$\lim\limits_{x\to\infty} f_2\,(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f_2\,(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$

Ableitung

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$
Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen.
Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.
Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.
$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}... + a_2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a_1$
$f(x) = ax^n \qquad f'(x) = nax^{n-1}$
Grad 1: Lineare Funktion
$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$
Grad 2: Quadratische Funktion
$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$
Grad 3: Kubische Funktion
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Grad 4: Biquadratische Funktionen
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x-4)$
$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$
$f_1''(x) = -2\frac{1}{2}$
$f_1'''(x) = 0$

$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = -(x+1)^2(x-2)$
$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$
$f_2''(x) = -6x = -6x$
$f_2'''(x) = -6$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).
- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.
In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.
Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)
- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$
$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \qquad / -5$
$-2\frac{1}{2}x = -5 \qquad / : \left(-2\frac{1}{2}\right)$
$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$
$x = 2$
$f_1''(2) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: (2/5)

$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = 0$
$-3x^2 + 3 = 0 \qquad / -3$
$-3x^2 = -3 \qquad / : (-3)$
$x^2 = \frac{-3}{-3}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$f_2''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(-1/0)$
$f_2''(1) = -6$
$f_2''(1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: (1/4)

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) > 0$

streng monoton fallend

$x \in]2; \infty[\quad f'(x) < 0$

$f_2'(x) = -3x^2 + 3$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

streng monoton steigend

$x \in]-1; 1[\quad f'(x) > 0$

streng monoton fallend

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f'(x) < 0$

Wendepunkte und 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$f_1'''(x) = 0$

kein Wendepunkt

$f_2''(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$f'''(0) = 2$

$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$

Wendepunkt: (0/2)

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_2''(x) = -6x$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.

$f(x) = ax^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$

Unbestimmtes Integral: $F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

$F_1(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x)dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$

$F_2(x) = \int \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$A_1 = \int_0^4 \left(-1\frac{1}{4}x^2 + 5x\right) dx = \left[-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$

$= \left(-\frac{5}{12} \cdot 4^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 4^2\right) - \left(-\frac{5}{12} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 0^2\right)$

$= \left(13\frac{1}{3}\right) - (0) = 13\frac{1}{3}$

$A_2 = \int_{-1}^2 \left(-x^3 + 3x + 2\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^2$

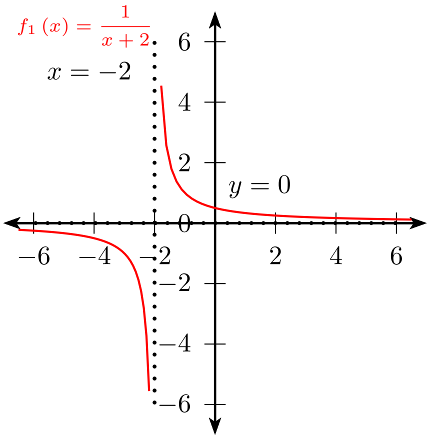
$= \left(-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2\right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right)$

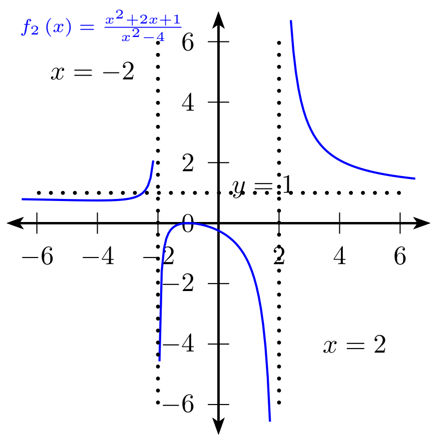
$= (6) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 6\frac{3}{4}$

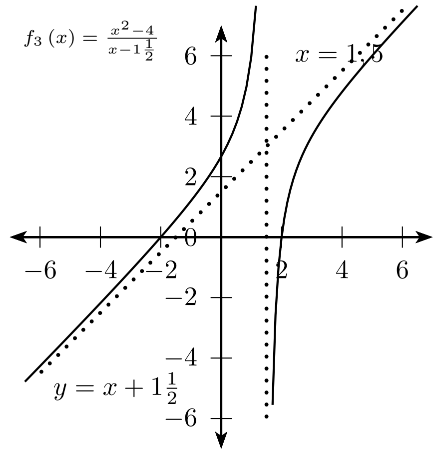
Interaktive Inhalte:

Funktionsgraph Wertetable hier klicken

4.4.2 Gebrochenrationale Funktion







Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

$= \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0}$

Zählerpolynom vom Grad n:

$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Nennerpolynom vom Grad m:

$N(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$

Produktdarstellung (faktorisierte Form) der gebrochenrationale Funktion:

$f(x) = a\dfrac{(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)...}{(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)...}$

$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners

$f_2(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zählerpolynom: $Z(x) = x^2 + 2x + 1$ Zählergrad:2

Nennerpolynom: $N(x) = x^2 - 4$ Nennergrad:2

Faktorisierte Form:

$f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

$f_3(x) = \dfrac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

Funktion nach der Polynomdivision:

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:

Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Nennerpolynom: $N(x) = 0$

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2..\}$

(siehe Algebra - Gleichungen)

Wertebereich:

Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$f_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_2(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Nenner Null setzen

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Zählerpolynom gleich Null setzen.

Zählerpolynom: $Z(x) = 0$

$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers

(siehe Algebra - Gleichungen)

$f_2\left(x\right) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zählerpolynom gleich Null setzen:

$x^2+2x+1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$x_1 = -1;$ 2-fache Nullstelle

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

• Zählergrad>Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$

Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm\infty$

• Zählergrad=Nennergrad+1

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = \pm\infty$

Polynomdivision - schiefe Asymptote

• Zählergrad=Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = \dfrac{a_n}{b_m}$

horizontale Asymptote: $y = \dfrac{a_n}{b_m}$

• Zählergrad<Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right) = 0$

horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad $<$ Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x+2} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

Zählergrad $=$ Nennergrad

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1x^2+2x+1}{1x^2-4} = \frac{1}{1} = 1$

Horizontale Asymptote: $y = 1$

Zählergrad $=$ Nennergrad+1

$f_3\left(x\right) = \dfrac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^2}{(-\infty)^1} = -\infty$

oder

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(1-\dfrac{4}{x^2})}{x(1-\dfrac{1\frac{1}{2}}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(1-\dfrac{4}{x^2})}{x(1-\dfrac{1\frac{1}{2}}{x})} = -\infty$

$$
\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\mathit{Polynomdivision:}} \\
(x^2 & & -4 &) : (x-1\frac{1}{2}) = x+1\frac{1}{2} \\
-(x^2 & -1\frac{1}{2}x) & & \\
\hline
 & 1\frac{1}{2}x & -4 & \\
 & -(1\frac{1}{2}x & -2\frac{1}{4}) & \\
\hline
 & & -1\frac{3}{4} &
\end{array}
$$

$f_3\left(x\right) = x+1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Schiefe Asymptote: $y = x+1\frac{1}{2}$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von f(x)

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$

Vertikale Asymptote: $x = x_0$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

$\lim_{x\to -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$\lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

Ableitung

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel:

$f'(x) = \frac{Z'(x)\cdot N(x) - Z(x)\cdot N'(x)}{(N(x))^2}$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f_1'(x) = \frac{0\cdot(x+2)-1\cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{0\cdot(x^2+4x+4)-(-1)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$

$= \frac{2}{(x+2)^3}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(x^2-4)-(x^2+2x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8)-(2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0 (LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0 (RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_2'(x) = \frac{-2x^2-10x-8}{x^4-8x^2+16} = 0$

$-2x^2-10x-8 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-8)}}{2\cdot(-2)}$

$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$

$x_1 = \frac{10+6}{-4} \qquad x_2 = \frac{10-6}{-4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$

$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow$ <u>Tiefpunkt: $(-4/\frac{3}{4})$</u>

$f''(-1) = -6$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ <u>Hochpunkt: $(-1/0)$</u>

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

• $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..).

In diesen Nullstellen (x_0, x_1..) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

• Hochpunkt (HP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	sms	HP	smf

• Tiefpunkt (TP)

Monotonoieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
Graph	smf	TP	sms

• Terrassenpunkt (TEP)

Monotonoieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
Graph	sms	TEP	sms

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$

Zähler $= 0$

keine Lösung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[\; f'(x) < 0$ smf

Wendepunkt und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen (x_0, x_1..).

Einsetzen der Nullstellen x_0, x_1.. in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

• $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

• $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

• Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	LK	WP	RK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht.

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$
Graph	LK	FP	LK

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$
Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

•Krümmung

$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

$Zhler = 0$

keine Lösung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_3 = -2;$ 1-fache Nullstelle

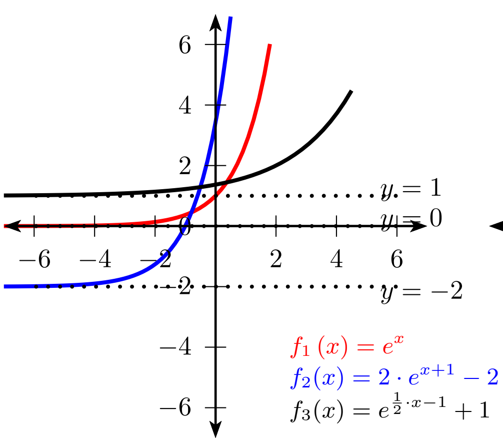
	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

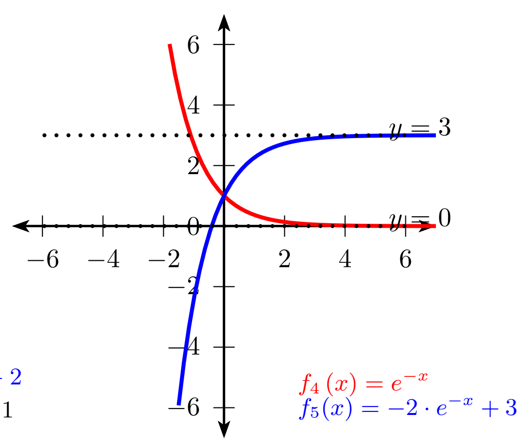
$x \in]-2;\infty[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-2[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable hier klicken

4.4.3 Exponentialfunktion (Basis e)





Formen der Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$

Allgemeine Exponentialfunktion

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

(siehe Funktionen - Exponentialfunktion)

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$
$f_4\,(x) = e^{-x}$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = e^x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$a > 0 \qquad \mathbb{W} = [d; \infty[$

$a < 0 \qquad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [-2; \infty[$
$f_4\,(x) = e^{-x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^+$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x) = e^x \qquad e^x > 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

$f(x) = ae^{(b(x-c))} + d$

$ae^{b(x-c)} + d = 0 \qquad / - d$

$ae^{b(x-c)} = -d \qquad / : a$

$e^{b(x-c)} = \frac{-d}{a} \qquad / \ln$

$\frac{-d}{a} > 0$

$b(x-c) = \ln\left(\frac{-d}{a}\right) \qquad / : b \qquad / + c$

$x = \frac{\ln\left(\frac{-d}{a}\right)}{b} + c$

$\frac{-d}{a} \leq 0 \qquad \Rightarrow$ keine Nullstellen

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$
$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0$
$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0 \qquad / + 2$
$2 \cdot e^{(x+1)} = +2 \qquad / : 2$
$e^{(x+1)} = 1 \qquad / \ln$
$x + 1 = \ln(1) \qquad / - 1$
$x = -1$
$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$
$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 = 0 \qquad / - 1$
$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} = -1$
$-1 < 0 \Rightarrow$ keine Nullstellen

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = e^x$
$\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \Rightarrow$ horizontale Asymptote y=0
$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$
$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d$
Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:
$\lim\limits_{x\to\infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{\infty} = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} a\infty + d = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} b(-\infty - c) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\infty} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} a \cdot 0 + d = d \quad \Rightarrow$ HA: $y = d$

a	b	Grenzwert $\to +\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	+	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	-	$\lim\limits_{x\to\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$

a	b	Grenzwert $\to -\infty$	Asymptote
+	+	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	+	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
+	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	-	$\lim\limits_{x\to-\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$
$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2$
$\lim\limits_{x\to\infty} \infty + 1 = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} e^{\infty} = \infty \quad \lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot \infty - 2 = \infty$
$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad \lim\limits_{x\to-\infty} (-\infty + 1) = -\infty \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\infty} = 0$
$\lim\limits_{x\to\infty} 2 \cdot 0 - 2 = -2$
$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = -2 \quad HA: y = -2$
$f_4(x) = e^{-x}$
$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0 \quad HA: y = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$
$\lim\limits_{x\to\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = 3 \quad HA: y = 3$
$\lim\limits_{x\to-\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = +\infty$

Ableitung

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$
Ableitung mit der Kettenregel
$f(x) = e^{bx} \quad f'(x) = be^{bx} \quad f''(x) = b^2e^{bx}$
$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$
$f''(x) = a \cdot b^2e^{b(x-c)}$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} \quad f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1}$
$f_4(x) = e^{-x} \quad f_4'(x) = -e^{-x} \quad f_4'(x) = e^{-x}$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$
$f_3(x) = e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1} + 1 \quad f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1}$
$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1}$

Monotonieverhalten

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$
$e^x > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend
$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$
$f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$
$e^{b(x-c)} > 0$
$a \cdot b > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend (sms)
$a \cdot b < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend (smf)

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow$ sms
$f_4'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow$ smf
$f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x} > 0 \Rightarrow$ sms
$f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\cdot x - 1} > 0 \Rightarrow$ sms

Ableitung

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$
Ableitung mit Kettenregel
$f(x) = e^{ax} \quad f'(x) = ae^{ax}$
$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1}$
$f_4(x) = e^{-x} \quad f_4'(x) = -e^{-x}$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$

Krümmungsverhalten

$f(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$

$e^{b(x-c)} > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$a < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow$ LK
$f_4''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow$ LK
$f_5''(x) = -2 \cdot e^{-x} < 0 \Rightarrow$ RK
$f_3''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} > 0 \Rightarrow$ LK

Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

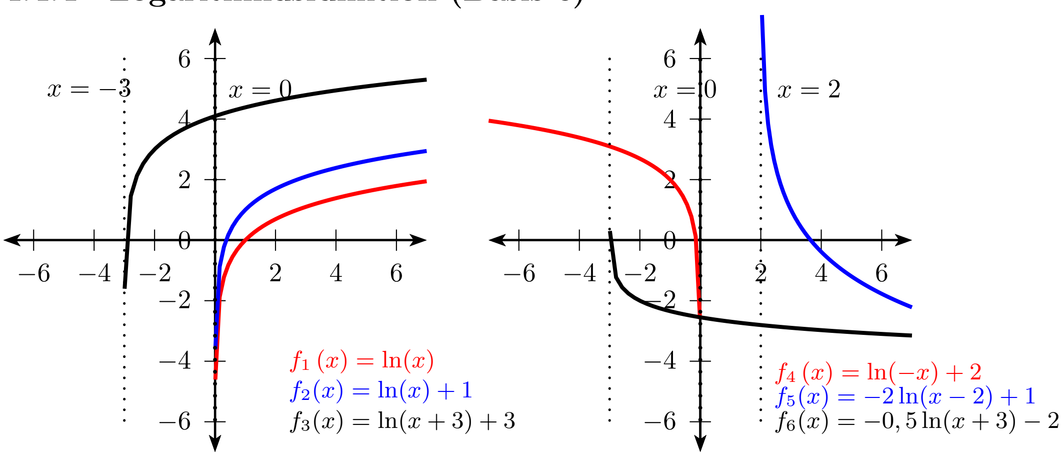
$f(x) = e^x \qquad F(x) = e^x + k$

$f(x) = ae^{b(x-c)} \qquad F(x) = \dfrac{a}{b} e^{b(x-c)} + k$

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \qquad F_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2x + c$
$f_4(x) = e^{-x} \qquad F_4(x) = -e^{-x} + c$
$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \qquad F_5(x) = 2 \cdot e^{-x} + 3x + c$
$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$
$F_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + x + c = 2e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + x + c$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.4.4 Logarithmusfunktion (Basis e)



Formen der Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktion

$f(x) = \ln x$

Allgemeine Logarithmusfunktion

$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d$

(siehe Funktionen - Logarithmusfunktion)

$f_1(x) = \ln(x)$
$f_2(x) = \ln(x) + 1$
$f_3(x) = \ln(x+3) + 3$
$f_4(x) = ln(-x) + 2$
$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1$
$f_6(x) = -0,5\ln(x+3) - 2$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \ln x$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = a \ln b(x-c) + d$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Definitionsbereich: $bx - c > 0$

- $b > 0 \qquad \mathbb{D} =]c; \infty[$
- $b < 0 \qquad \mathbb{D} =]-\infty; c[$

$f_1(x) = \ln(x) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f_2(x) = \ln(x) + 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$
$f_3(x) = \ln(x+3) + 3 \qquad \mathbb{D} =]-3; \infty[$
$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$
$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \qquad \mathbb{D} =]2; \infty[$
$f_6(x) = -0,5\ln(x+3) - 2 \qquad \mathbb{D} =]-3; \infty[$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x) = \ln(x)$

$\ln(x) = 0 \quad /e$

$x = e^0$

$x = 1$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d$

$a\ln(b(x-c)) + d = 0 \qquad / - d$

$a\ln(b(x-c)) = -d \qquad / : a$

$\ln(b(x-c)) = \frac{-d}{a} \qquad /e$

$b(x-c) = e^{\left(\frac{-d}{a}\right)} \qquad / : b \qquad / + c$

$x = \frac{e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}}{b} + c$

$f_3(x) = \ln(x+3) + 3$
$\ln(x+3) + 3 = 0$
$\ln(x+3) + 3 = 0 \qquad / - 3$
$\ln(x+3) = -3 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$x + 3 = e^{-3} \qquad / - 3$
$x = e^{-3} - 3$
$x = -2,95$
$f_6(x) = -0,5\ln(x+3) - 2$
$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) - 2 = 0$
$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) - 2 = 0 \qquad / + 2$
$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x+3) = +2 \qquad / : -\frac{1}{2}$
$\ln(x+3) = -4 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$x + 3 = e^{-4} \qquad / - 3$
$x = e^{-4} - 3$
$x = -2,98$

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = \ln(x)$

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow \qquad$ vertikale Asymptote: $x = 0$

$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$\lim_{x \to \infty} b(\infty - c) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln\infty = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} a\infty + d = \infty$

$\lim_{x \to c^+} b(c^+ - c) = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln 0^+ = -\infty$

$\lim_{x \to 0^+} a \cdot (-\infty) + d = -\infty \qquad \Rightarrow$ VA: $x = c$

a	b	Grenzwert $\to \pm\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \to \infty} a\ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \to \infty} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \to -\infty} a\ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \to -\infty} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	keine

a	b	Grenzwert $\to c$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \to c^+} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	+	$\lim_{x \to c^+} a\ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$
+	-	$\lim_{x \to c^-} a\ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	-	$\lim_{x \to c^-} a\ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$

$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \qquad \mathbb{D} =]2; \infty[$
$\lim_{x \to \infty} -2\ln(x-2) + 1$
$\lim_{x \to \infty} \infty - 2 = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \ln\infty = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} -2 \cdot \infty + 1 = -\infty$
$\lim_{x \to \infty} -2\ln(x-2) + 1 = -\infty$
$\lim_{x \to 2^+} -2\ln(x-2) + 1$
$\lim_{x \to 2^+} (2^+ - 2) = 0^+ \qquad \lim_{x \to 2^+} \ln 0^+ = -\infty$
$\lim_{x \to 2^+} -2 \cdot (-\infty) - 2 = \infty$
$\lim_{x \to 2^+} -2\ln(x-2) + 1 = \infty \qquad VA : x = 2$
$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$
$\lim_{x \to -\infty} \ln(-x) + 2 = \infty$
$\lim_{x \to 0^-} \ln(-x) + 2 = -\infty \qquad VA : x = 0$

Ableitung

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Ketten- und Quotientenregel :

$f(x) = \ln bx \qquad f'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x-c)}$

$f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$

$f_2(x) = \ln(x) + 1 \qquad f_2'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f_3(x) = \ln(x+3) + 3 \qquad f_3'(x) = \frac{1}{x+3} = (x+3)^{-1}$

$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2}$

$f_4(x) = ln(-x) + 2 \qquad f_4'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f_4''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$f_5(x) = -2\ln(x-2) + 1 \qquad f_5'(x) = \frac{-2}{(x-2)} = -2(x-2)^{-1}$

$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2}$

Monotonieverhalten

$f(x) = \ln(x) \qquad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$\frac{1}{x} \Rightarrow$ streng monoton steigend $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x-c)}$

$b(x-c) > 0$

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$f_2'(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_3'(x) = \frac{1}{x+3} > 0 \Rightarrow$ sms

$f_5'(x) = \frac{-2}{(x-2)} < 0 \Rightarrow$ smf

Krümmungsverhalten

$f(x) = \ln(x) \qquad f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

$\frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$f(x) = a\ln(b(x-c)) + d \qquad f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$

$(b(x-c))^2 > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

$a < 0 \Rightarrow$ linkssgekrümmt (LK)

$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow$ RK

$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0 \Rightarrow$ RK

$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow$ LK

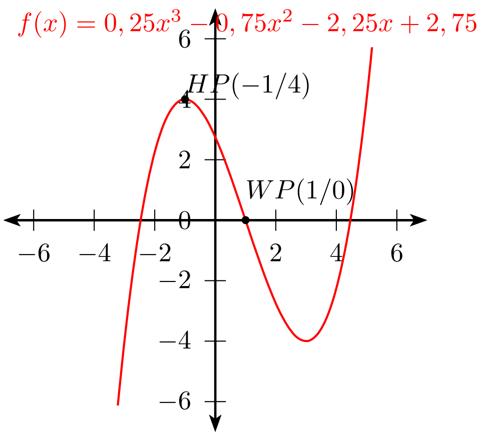
Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$f(x) = \ln(x) \qquad F(x) = x\ln(x) - x + c$

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable

4.5 Aufstellen von Funktionsgleichungen

4.5.1 Ganzrationale Funktion



Eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist durch n+1 Bedingungen eindeutig festgelegt. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2}... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Um die n+1 Koeffizienten $(a_n, a_{n-1}.., a_0)$ berechnen zu können, sind n+1 Gleichungen (n+1 Bedingungen) nötig.

Funktion vom Grad 2

Um die 3 Koeffizienten (a,b,c) berechnen zu können, sind 3 Gleichungen (3 Bedingungen) nötig.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

Funktion vom Grad 3

Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen (4 Bedingungen) nötig. $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

Funktion vom Grad 4

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, das bei x = 1 einen Wendepunkt hat, im Punkt P(-1/4) ein Extremum besitzt und bei x = 1 die x-Achse schneidet.

Polynom 3. Grades
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$
$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$
Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen nötig.
1. Bedingung: Wendepunkt bei $x = 1$
$f''(1) = 0 \qquad 6a \cdot 1 + 2b = 0$
2. Bedingung: Punkt $P(-1/4)$
$f(-1) = 4 \qquad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$
3. Bedingung: Extremwert an der Stelle $x_0 = 1$
$f'(-1) = 0 \qquad 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$
4.Bedingung: Nullstelle an der Stelle $x_0 = 1$
$f(1) = 0 \qquad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$
Lineares Gleichungssystem lösen:
$6a + 2b = 0$
$-a + b - c + d = 4$
$3a - 2b + c = 0$
$a + b + c + d = 0$
$a = \frac{1}{4}$
$b = -\frac{3}{4}$
$c = -2\frac{1}{4}$
$d == 2\frac{3}{4}$
Funktionsgleichung:
$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$

Bedingungen für die Funktion	Gleichung
Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$
Punkt auf der y-Achse y_0	$f(0) = y_0$
Extremwert an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Horizontale Tangente an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Berührpunkt der x-Achse an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
Tangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Normale: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{m}$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$
Terrassenpunkt an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m an der Stelle x_0	$f'(x_0) = m$
Hoch-/Tiefpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
Terrassenpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Wendepunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
Wendetangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m im Punkt P(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$	Glieder mit ungeraden Exponenten entfallen
Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$	Glieder mit geraden Exponenten entfallen

Interaktive Inhalte:
Funktionsgraph Wertetable Terme aufstellen

5 Stochastik

5.1 Statistik

5.1.1 Mittelwert - Median - Modalwert

Noten in Mathematik: 4,3,5,3,3,5,2,4

Arithmetisches Mittel

Durchschnittswert $\bar{x}$ der Datenreihe $x_1, x_2, x_3....x_n$
n - Anzahl der Elemente
$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3....x_n)$
$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Mittelwert:
$\bar{x} = \frac{1}{8}(4+3+5+3+3+5+2+4) = 3,625$

Median

Zentralwert der geordneten Datenreihe
n - Anzahl der Elemente
$x_{med} = \frac{x_{n/2}+x_{n/2+1}}{2}$ wenn n gerade
$x_{med} = x_{(n+1)/2}$ wenn n ungerade

geordnete Datenreihe

x_1	2
x_2	3
x_3	3
x_4	3
x_5	4
x_6	4
x_7	5
x_8	5

Median:
$x_{med} = \frac{3+4}{2} = 3,5$

Spannweite

Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der geordneten Datenreihe
$d = x_{max} - x_{min}$

Spannweite:
$d = 5 - 2 = 3$

Häufigkeitstabelle - Modalwert

Wert aus der Datenreihe, der am häufigsten vorkommt

Häufigkeit

Anzahl	Noten
1	2
3	3
2	4
2	5

$x_{Mod} = 3$

Interaktive Inhalte:
Statistik

5.2 Kombinatorik

5.2.1 Grundlagen

	Ohne Wiederholung	Mit Wiederholung
Permutation	$n!$	$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}$
Variation	$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$	n^k
Kombination	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Fakultät

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

$0! = 1$
$1! = 1$
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad n$ über k

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{(7-3)! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$
$\binom{40}{38} = \binom{40}{2} = \frac{40!}{(40-38)! \cdot 38!} = \frac{40 \cdot 39}{1 \cdot 2} = 780$
$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$

Interaktive Inhalte:
$n!$

5.2.2 Anzahl der Anordungen - Permutation

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - alle Elemente verschieden

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,c bilden?
abc *acb* *bac* *bca* *cab* *cba*
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Anzahl der Anordungen ohne Wiederholung - nicht alle Elemente verschieden

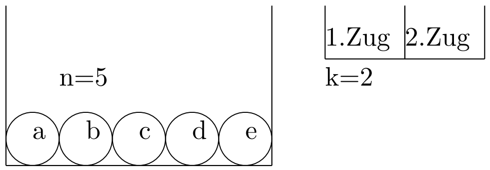
$\frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_m!}$

Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben a,b,b,b,b bilden?
a,b,b,b,b b,a,b,b,b b,b,a,b,b b,b,b,a,b b,b,b,b,a
$\frac{5!}{4!} = 5$

Interaktive Inhalte:
$n!$

5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

	ab	ac	ad	ae
ba		bc	bd	be
ca	cb		cd	ce
da	db	dc		de
ea	eb	ec	ed	

1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 4 Möglichkeiten

$5 \cdot 4 = 20 = \frac{5!}{(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$n^k$$

aa	ab	ac	ad	ae
ba	bb	bc	bd	be
ca	cb	cc	cd	ce
da	db	dc	dd	de
ea	eb	ec	ed	ee

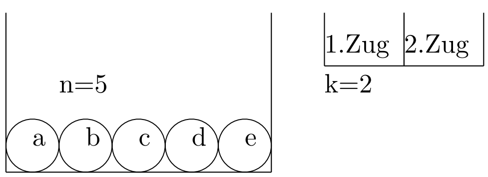
1. Zug: 5 Möglichkeiten
2. Zug: 5 Möglichkeiten

$5 \cdot 5 = 25 = 5^2$ Möglichkeiten

Interaktive Inhalte:
$\frac{n!}{(n-k)!}$ n^k

5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination

Ziehen von 2 Kugeln aus 5 verschiedenen Kugeln



Auswahl von k Elementen aus n unterschiedlichen Objekten ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \qquad n \text{ über } k$$

ab	ac	ad	ae
	bc	bd	be
		cd	ce
			de

$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 = \frac{5!}{2!(5-2)!}$ Möglichkeiten

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$\binom{n+k-1}{k}$$

aa	ab	ac	ad	ae
	bb	bc	bd	be
		cc	cd	ce
			dd	de
				ee

$$\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15 \text{ Möglichkeiten}$$

Interaktive Inhalte:

$\binom{n}{k}$ $\binom{n+k-1}{k}$

5.3 Wahrscheinlichkeit

5.3.1 Zufallsexperiment

Ergebnis - Ereignis

- Ein Zufallsexperiment ist beliebig oft wiederholbar
- Die Elementarergebnisse (Stichproben, Ausgänge) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, ...$ des Zufallsexperiment sind nicht vorhersagbar
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω
- $|\Omega|$ ist die Anzahl der Ergebnisse von Ω
- Ein Ergeignis A ist eine Teilmenge von Ω
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Die Menge aller Ergeinisse heißt Ereignisraum P

Werfen einer Münze
Ergebnis: $\omega_1 = Wappen(W) \qquad \omega_2 = Zahl(Z)$
Ergebnismenge: $\Omega = \{W, Z\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 2$
Ereignis: $A = \{W\}$
Ereignis: $B = \{Z\}$
Werfen eines Würfels
Ergebnis: $\omega_1 = 1 \qquad \omega_2 = 2 \qquad \omega_3 = 3$
$\omega_4 = 4 \qquad \omega_5 = 5 \qquad \omega_6 = 6$
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Anzahl der Ergebnisse: $|\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der Elemente von $|A| = 4$
Gegenereignis: $\overline{B} = \{2, 4\}$
Anzahl der Elemente von$|\overline{B}| = 2$

Schnittmenge $\cap$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Ergebnisse die in A und zugleich in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Ergebnisse die in A oder B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Differenz $\setminus$ von Ereignissen

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Ergebnisse die in A, aber nicht in B enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} == \{1\}$

Gegenereignis $\overline{A}$

$\overline{A} = \Omega \setminus A$
Alle Ergebnisse die in Ω, aber nicht in A enthalten sind.

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Gegenerreignis: $\overline{A} = \{2, 4\}$

Vereinbare - unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\} \Leftrightarrow$ unvereinbare Ereignisse

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{a, b...\} \Leftrightarrow$ vereinbare Ereignisse

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{3, 5, 6\}$
Ereignis: $B = \{3, 4, 5\}$
Ereignis: $C = \{1, 2\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3; 5\}$ vereinbare Ereignisse
$\mathbb{A} \cap \mathbb{C} = \{\}$ unvereinbare Ereignisse

Rechengesetze

- Kommutativgesetz

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

- Assoziativgesetz

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Distributivgesetz

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

- De Morgan

$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

$\overline{\overline{A}} = A$

- Neutrales Element

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

- Inverses Element

$A \cap \overline{A} = \emptyset$

$A \cup \overline{A} =$Grundmenge

5.3.2 Relative Häufigkeit

Definition

$h_n(A) = \frac{k}{n}$

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Absolute Häufigkeit von A

$h(A)$ - Relative Häufigkeit von A

Eigenschaften

- $0 \leq h(A) \leq 1$
- $h(\emptyset) = 0$
- $h(\Omega) = 1$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B)$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $h(A) = 1 - h(\overline{A})$

Interaktive Inhalte:
$h_n(A) = \frac{k}{n}$

5.3.3 Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

$P(A) = \frac{k}{n}$
Voraussetzung: Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich

n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs

A - Ereignis

k - Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse für A

$P(A)$- Wahrscheinlichkeit von A

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich:
$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$
Anzahl aller möglichen Versuchsergebnisse: $n = |\Omega| = 6$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5, 6\}$
Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse: $k = |A| = 4$
Wahrscheinlichkeit von A
$P(A) = \frac{4}{6}$

Eigenschaften

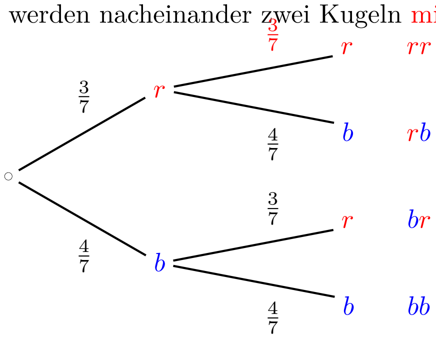
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Werfen eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Ereignis: $A = \{1, 3, 5\}$
Ereignis: $B = \{2, 3, 4, 5\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{3, 5\}$
$P(A) = \frac{3}{6}$
$P(B) = \frac{4}{6}$
$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
$P(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$

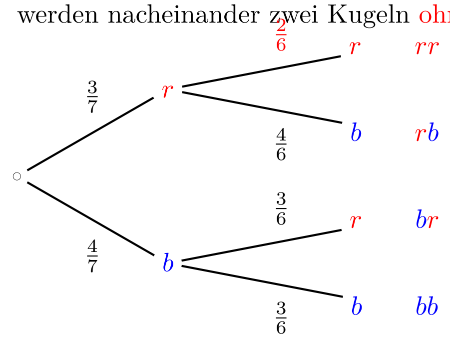
Interaktive Inhalte:
$P(A) = \frac{k}{n}$

5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

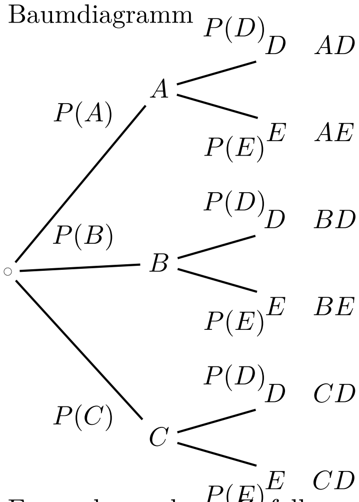
In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.



In einer Urne befinden sich drei rote und vier blaue Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.



Baumdiagramm



Es werden mehrere Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt. Jedes mögliche Elementarereignis wird zu einem Knoten (A,B,C..) im Baumdiagramm.

Zufallsexperiment 1: $\Omega = \{A, B, C\}$

Zufallsexperiment 2: $\Omega = \{D, E\}$

Die Knoten werden durch Pfade verbunden und die Wahrscheinlichkeiten angetragen. (P(A),P(B)...)

Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen sich zu 1 addieren.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (AD,AE..)ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

$P(AD) = P(A) \cdot P(D) \qquad P(AE) = P(A) \cdot P(E)$

$P(BD) = P(B) \cdot P(D) \qquad P(BE) = P(B) \cdot P(E)$

$P(CD) = P(C) \cdot P(D) \qquad P(CE) = P(C) \cdot P(E)$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse .

$P(AD, CD) = P(AD) + P(CD)$

Ziehen mit Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{49}$

Wahrscheinlichkeit für nur gleichfarbige Kugeln

E = {rr;bb}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rr) + P(bb) = \frac{9}{49} + \frac{16}{49} = \frac{25}{49}$

Ziehen ohne Zurücklegen

$\Omega = \{rr; rb; br; bb\}$

1. Pfadregel:

$P(rr) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

$P(rb) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$

$P(br) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

$P(bb) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

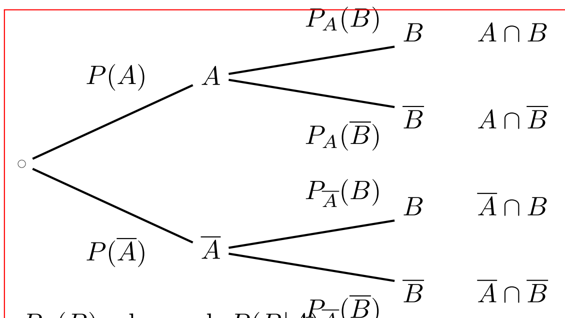
Wahrscheinlichkeit für genau 1 rote Kugel

E = {rb;br}

2. Pfadregel:

$P(E) = P(rb) + P(br) = \frac{12}{42} + \frac{12}{42} = \frac{24}{42}$

5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

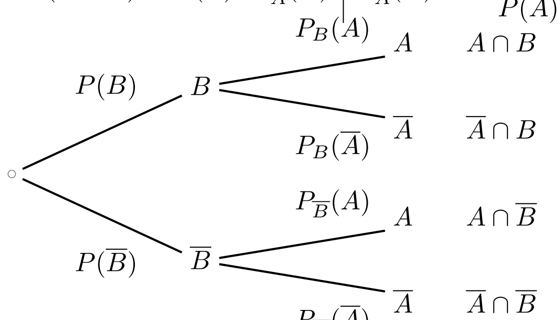


$P_A(B)$ oder auch $P(B|A)$

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A. Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \qquad P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) \qquad P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) \qquad P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{A})}$$



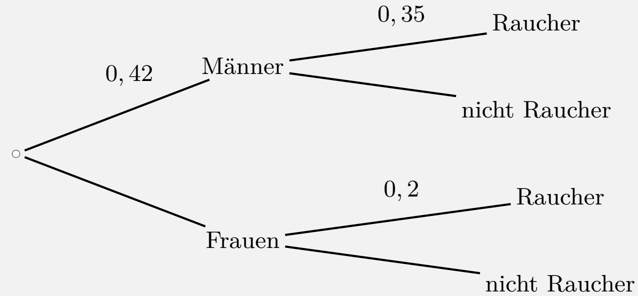
$P_B(A)$ oder auch $P(A|B)$

Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn B schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A) \qquad P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) \cdot P_B(\overline{A}) \qquad P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(A) \qquad P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(\overline{A}) \qquad P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$
$$P(\overline{A}) = P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B})$$



42 Prozent der Deutschen sind Männer.

35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.

Männer (A) $P(A) = 0,42$ - Frauen($\overline{A}$) $P(\overline{A}) = 0,58$

Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)

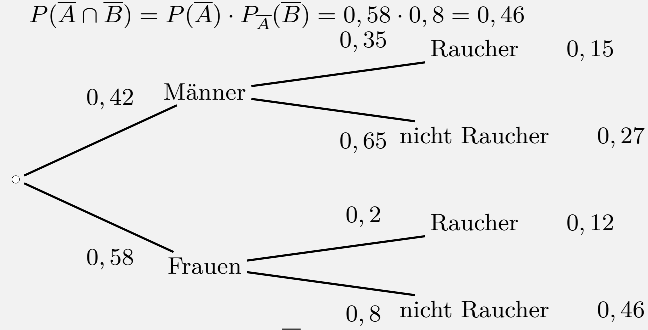
Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B) = 0,35$

nicht Raucher unter den Männern: $P_A(\overline{B}) = 0,65$

Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(B) = 0,2$

nicht Raucher unter den Frauen: $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,8$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = 0,42 \cdot 0,35 = 0,15$$
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P_A(\overline{B}) = 0,42 \cdot 0,65 = 0,27$$
$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B) = 0,58 \cdot 0,2 = 0,12$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,58 \cdot 0,8 = 0,46$$



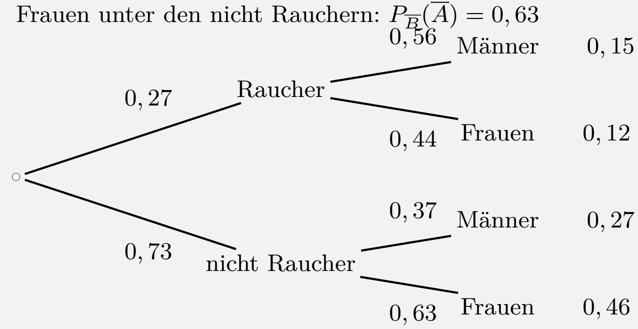
$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = 0,15 + 0,12 = 0,27$$
$$P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0,27 + 0,46 = 0,73$$
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,27} = 0,56$$
$$P_B(\overline{A}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(B)} = \frac{0,12}{0,27} = 0,44$$
$$P_{\overline{B}}(A) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{B})} = \frac{0,27}{0,23} = 0,37$$
$$P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0,46}{0,73} = 0,63$$

Männer unter den (Bedingung) Rauchern: $P_B(A) = 0,56$

Frauen unter den Rauchern: $P_B(\overline{A}) = 0,44$

Männer unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(A) = 0,37$

Frauen unter den nicht Rauchern: $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = 0,63$



5.3.6 Vierfeldertafel

Relativer Häufigkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$

2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$h(A \cap B)$ a	$h(\overline{A} \cap B)$ b	$h(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$h(A \cap \overline{B})$ c	$h(\overline{A} \cap \overline{B})$ d	$h(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$h(A)$ $a+c$	$h(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Relative Häufigkeit der Ausprägung

$h(A), h(B), h(\overline{A}), h(\overline{B})$

$h(B) + h(\overline{B}) = 1 \qquad h(A) + h(\overline{A}) = 1$

Relative Häufigkeit von der Schnittmenge

$h(A \cap B), h(\overline{A} \cap B), h(A \cap \overline{B}, h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(B) = h(A \cap B) + h(\overline{A} \cap B)$

$h(\overline{B}) = h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B})$

$h(\overline{A}) = h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

Relative Häufigkeiten von der Vereinigungsmenge

$h(A \cup B), h(\overline{A} \cup B), h(A \cup \overline{B} h(\overline{A} \cup \overline{B})$

$h(A \cup B) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap B)$

$h(\overline{A} \cup B) = h(A \cap B) + h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A \cup \overline{B}) = h(A \cap B) + h(A \cap \overline{B}) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(\overline{A} \cap \overline{B}) = h(A \cap \overline{B} + h(\overline{A} \cap B) + h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(A \cup B) = 1 - h(\overline{A} \cap \overline{B})$

$h(\overline{A} \cup B) = 1 - h(A \cap \overline{B})$

$h(A \cup \overline{B}) = 1 - h(A \cap \overline{B})$

$h(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - h(A \cap B)$

Relative Häufigkeit unter einer Bedingung

$$h_A(B) = \frac{h(A \cap B)}{h(A)}$$

$$h_A(\overline{B}) = \frac{h(A \cap \overline{B})}{h/A)}$$

$$h_{\overline{A}}(B) = \frac{h(\overline{A} \cap B)}{h(\overline{A})}$$

$$h_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{h(\overline{B} \cap \overline{B})}{h(\overline{A})}$$

In einer Schulklasse sind 32 Schüler, darunter 18 Mädchen.
6 Mädchen und 8 Jungen sind krank.
1. Merkmal: Mädchen (A) - Jungen($\overline{A}$)
2.Merkmal: Krank(B) - Gesund ($\overline{B}$)

Mädchen: $A = 18$

Jungen: $\overline{A} = 32 - 18 = 14$

kranke Mädchen: $A \cap B = 6$

kranke Jungen: $\overline{A} \cap B = 8$

Kranke: $B = 6 + 8 = 14$

gesunde Mädchen: $A \cap \overline{B} = 18 - 6 = 12$

gesunde Jungen: $\overline{A} \cap \overline{B} = 14 - 8 = 6$

Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$A \cap B$ 6	$\overline{A} \cap B$ 8	B 14
$\overline{B}$ Gesund	$A \cap \overline{B}$ 12	$\overline{A} \cap \overline{B}$ 6	$\overline{B}$ 18
$\sum$	A 18	$\overline{A}$ 14	$Insgesamt$ 32

Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten

	A Mädchen	$\overline{A}$ Jungen	$\sum$
B Krank	$h(A \cap B)$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{A} \cap B)$ $\frac{8}{32}$	$h(B)$ $\frac{14}{32}$
$\overline{B}$ Gesund	$h(A \cap \overline{B})$ $\frac{12}{32}$	$h(\overline{A} \cap \overline{B})$ $\frac{6}{32}$	$h(\overline{B})$ $\frac{18}{32}$
$\sum$	$h(A)$ $\frac{18}{32}$	$h(\overline{A})$ $\frac{14}{32}$	1 $\frac{32}{32}$

Relative Häufigkeit von

Mädchen $h(A) = \frac{18}{32}$ Jungen $h(\overline{A}) = \frac{14}{32}$

Krank $h(B) = \frac{14}{32}$ Gesund $h(\overline{B}) = \frac{18}{32}$

Anzahl der gesunden Mädchen: 12

$h(A \cap \overline{B}) = \frac{12}{32} = 37,5\%$

37,5% der gesamten Schüler sind gesunde Mädchen.

Wieviel Prozent der Mädchen sind gesund?

$$h_A(\overline{B}) = \frac{h(A \cap \overline{B})}{h(A)} = \frac{\frac{12}{32}}{\frac{18}{32}} = \frac{12}{18}$$

Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und $\overline{A}$.
2. Merkmal hat die Ausprägung B und $\overline{B}$.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	$P(A\cap B)$ a	$P(\overline{A}\cap B)$ b	$P(B)$ $a+b$
$\overline{B}$	$P(A\cap\overline{B})$ c	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ d	$P(\overline{B})$ $c+d$
$\sum$	$P(A)$ $a+c$	$P(\overline{A})$ $b+d$	1 $a+b+c+d$

Wahrscheinlichkeit der Ausprägung

$P(A), P(B), P(\overline{A}), P(\overline{B})$

$P(B)+P(\overline{B})=1$

$P(A)+P(\overline{A})=1$

Wahrscheinlichkeit von der Schnittmenge

$P(A\cap B), P(\overline{A}\cap B), P(A\cap\overline{B}, P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$

$P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$

$P(\overline{A})=P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap\overline{B})$

Berechnungen mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$P(A\cap B)=P_A(B)\cdot P(A)$

$P(A\cap\overline{B})=P_A(\overline{B})\cdot P(A)$

$P(\overline{A}\cap B)=P_{\overline{A}}(B)\cdot P(\overline{A})$

$P(\overline{B}\cap\overline{B})=P_{\overline{A}}(\overline{B})\cdot P(\overline{A})$

Wahrscheinlichkeit von der Vereinigungsmenge

$P(A\cup B), P(\overline{A}\cup B), P(A\cup\overline{B}P(\overline{A}\cup\overline{B})$

$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$

$P(\overline{A}\cup B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$P(A\cup\overline{B})=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(A\cap\overline{B}+P(\overline{A}\cap B)+P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})$

$P(\overline{A}\cup B)=1-P(A\cap\overline{B})$

$P(A\cup\overline{B})=1-P(A\cap\overline{B})$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-P(A\cap B)$

42 Prozent der Deutschen sind Männer. 35 Prozent der Männer und 20 Prozent der Frauen rauchen.

1.Merkmal: Männer (A) Frauen($\overline{A}$)

2.Merkmal: Raucher(B) - nicht Raucher ($\overline{B}$)

$P(A)=0,42$ $P(\overline{A})=1-0,42=0,58$

Raucher unter den (Bedingung) Männern: $P_A(B)=0,35$

$P(A\cap B)=P_A(B)\cdot P(A)=0,35\cdot 0,42=0,15$

Raucher unter den (Bedingung) Frauen: $P_{\overline{A}}(B)=0,2$

$P(\overline{A}\cap B)=P_{\overline{A}}(B)\cdot P(\overline{A})=0,2\cdot 0,58=0,12)$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=0,42-0,15=0,27$

$P(\overline{B})=0,58-0,12=0,46$

$P(B)=0,15+0,12=0,27$

$P(\overline{B})=1-0,27=0,73$

	A Männer	$\overline{A}$ Frauen	$\sum$
B Raucher	$P(A\cap B)$ $0,15$	$P(\overline{A}\cap B)$ $0,12$	$P(B)$ $0,27$
$\overline{B}$ nicht Raucher	$P(A\cap\overline{B})$ $0,27$	$P(\overline{A}\cap\overline{B})$ $0,46$	$P(\overline{B})$ $0,73$
$\sum$	$P(A)$ $0,42$	$P(\overline{A})$ $0,58$	1

Stochastische Unabhängigkeit

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A,B unabhängig

$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow$ A,B abhängig

$P(A \cap B) = 0,15$
$P(A) = 0,42$
$P(B) = 0,27$
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$
$0,15 \neq 0,42 \cdot 0,27 \Leftrightarrow$ A,B abhängig

5.3.7 Binomialverteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Zwei Ausgänge des Zufallsexperiments: rote oder blaue Kugeln
Wahrscheinlichkeit für eine rote Kugel: $p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
Wahrscheinlichkeit für eine blaue Kugel: $q = 1 - p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
Anzahl der Versuche: n=3
Ziehen mit Zurücklegen: Wahrscheinlickeiten ändern sich nicht

Definition

$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Bernoulli-Experiment)
- p - Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
- Stichprobe mit Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich nicht
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs (Bernoulli-kette der Länge n)
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?
Genau 2 rote Kugeln: k=2

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
$P(X = 2) = B(10, \frac{2}{5}, 2)$
$P(X = 2) = \binom{10}{2} \cdot (\frac{2}{5})^2 \cdot (1 - \frac{2}{5})^{10-2}$
$P(X = 2) = 0,121$

Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(0 \leq X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i)$$

Binomialverteilung $n = 10 \quad p = \frac{2}{5}$

k	$B(10, \frac{2}{5}, k)$	$F(k)$
0	$0,006047$	$0,006047$
1	$0,040311$	$0,046357$
2	$0,120932$	$0,167290$
3	$0,214991$	$0,382281$
4	$0,250823$	$0,633103$
5	$0,200658$	$0,833761$
6	$0,111477$	$0,945238$
7	$0,042467$	$0,987705$
8	$0,010617$	$0,998322$
9	$0,001573$	$0,999895$
10	$0,000105$	$1,000000$

Bereiche der Binomialverteilung

höchstens k-mal

$$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p;i) = F(k)$$

weniger als k-mal

$$P(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n;p;i) = F(k-1)$$

mindestens k-mal

$$P(x \geq k) = \sum_{i=k}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k-1)$$

mehr als k-mal

$$P(x > k) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(k)$$

mindestens 1-mal

$$P(x \geq 1) = \sum_{i=1}^{n} B(n;p;i) = 1 - F(0) =$$

$$1 - B(n;p;0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden ..
genau 2 rote Kugeln
$P(x = 2) = 0,120932$
höchstens 2 rote Kugeln
$P(x \leq 2) = F(2) = \sum_{i=0}^{2} B(10; \frac{2}{5}; i) =$
$B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) + B(10, \frac{2}{5}, 2) = 0,167290$
weniger als 2 rote Kugeln
$P(x < 2) = F(1) = \sum_{i=0}^{1} B(10; \frac{2}{5}; i) =$
$B(10, \frac{2}{5}, 0) + B(10, \frac{2}{5}, 1) = 0,046357$
mehr als 2 rote Kugeln
$P(x > 2) == 1 - F(2) = 0,832710$
mindestens 2 rote Kugeln
$P(x \geq 2) = 1 - F(1) = 0,953643$
gezogen

3-mindestens-Aufgabe

P_{min} ist die Mindestwahrscheinlichkeit für mindesten einen Treffer ($x \geq 1$) und der Trefferwahrscheinlichkeit p bei mindestens n Versuchen.

$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

Gesucht: n - Mindestanzahl der Versuche

$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$

$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$

$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$

$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad /ln$

$\ln(1 - P_{min}) \geq \ln((1-p)^n)$

$\ln(1 - P_{min}) \geq n \ln((1-p) \qquad / : ln(1-p)$

$\frac{\ln(1-P_{min})}{\ln(1-p)} \leq n$

$n \geq \frac{\ln(1-P_{min})}{\ln(1-p)}$

Gesucht: p - Wahrscheinlichkeit eines Treffers

$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$

$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$

$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$

$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \qquad / - P_{min} / + (1-p)^n$

$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \qquad /^{\frac{1}{n}}$

$(1 - P_{min})^{\frac{1}{n}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$

$p \geq 1 - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen beträgt 20%. Wieviele Lose muss man mindestens kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50% mindestens einmal zu gewinnen?

$x \geq 1 \qquad p = 0,2 \qquad P_{min} \geq 0,5$

$P_{0,2}^n(x \geq 1) \geq 0,5$

$1 - P_{0,2}^n(0) \geq 0,5$

$1 - \binom{n}{0} \cdot 0,2^0 \cdot (1 - 0,2)^n \geq 0,5$

$1 - 0,8^n \geq 0,5 \qquad / - 0,5 / + 0,8^n$

$1 - 0,5 \geq 0,8^n \qquad /ln$

$\ln(0,5) \geq \ln(0,8^n)$

$\ln(0,5) \geq n \ln(0,8) \qquad / : ln(0,8)$

$\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)} \leq n$

$n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,8)}$

$n \geq 3,1$

Beim zehnmaligen Losen ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu gewinnen mindestens 40%. Wie groß muss die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn beim Losen sein ?

$x \geq 1 \qquad n = 10 \qquad P_{min} \geq 0,4$

$P_p^{10}(x \geq 1) \geq 0,4$

$1 - P_p^{10}(0) \geq 0,4$

$1 - \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10} \geq 0,4$

$1 - (1-p)^{10} \geq 0,4 \qquad / - 0,4 / + (1-p)^{10}$

$1 - 0,4 \geq (1-p)^{10} \qquad /^{\frac{1}{10}}$

$(0,6)^{\frac{1}{10}} \geq 1 - p \qquad / + p / - (0,6)^{\frac{1}{10}}$

$p \geq 1 - (0,6)^{\frac{1}{10}}$

$p \geq 0,05$

Wartezeitaufgaben

Erster Treffer im n-ten Versuch
$P(E) = (1-p)^{n-1} \cdot p$

Erster Treffer frühestens im n-ten Versuch
$P(E) = (1-p)^{n-1}$

Erster Treffer spätestens im n-ten Versuch
$P(E) = 1 - (1-p)^{n}$

k-ter Treffer im n-ten Versuch
$P(E) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$

k-ter Treffer frühestens im n-ten Versuch
$P(E) = P(x \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n-1; p; i)$

k-ter Treffer spätestens im n-ten Versuch
$P(E) = 1 - P(x \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n; p; i)$

Zufallsexperiment Würfeln.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 6

- beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = (1 - \frac{1}{6})^{9-1} \cdot \frac{1}{6}$
- frühestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = (1 - \frac{1}{6})^{9-1}$
- spätestens beim 9. Wurf zum ersten Mal auftritt?
$P(E) = 1 - (1 - \frac{1}{6})^{9}$
- beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = \binom{9-1}{3-1} \cdot \frac{1}{6}^{3-1} \cdot (1-p)^{9-3} \cdot \frac{1}{6}$
- frühestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = \sum_{i=0}^{3-1} B(9-1; \frac{1}{6}; i)$
- spätestens beim 9. Wurf zum dritten Mal auftritt?
$P(E) = 1 - \sum_{i=0}^{3-1} B(9; \frac{1}{6}; i)$

Interaktive Inhalte:
$P(X = k)$ | $F(x)$ | $P(k1 \leq X \leq k2)$ | $P(X >, \geq, \leq ....k)$

5.3.8 Hypergeometrische Verteilung

In einer Urne befinden sich vier rote und sechs blaue Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Anzahl der Elemente: N=10
Anzahl der Züge: n=3
Anzahl der roten Kugeln: K=4
Ziehen ohne Zurücklegen

Definition

$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Voraussetzung
- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen
- Stichprobe ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich
- N - Anzahl aller Elemente
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs
- K - Anzahl von A unter den N - Elementen
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 2 rote Kugeln zu ziehen?
Anzahl der gezogenen roten Kugeln: k=2

$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$
$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{10-4}{3-2}}{\binom{10}{3}}$
$P(X = 2) = \frac{3}{10}$

Interaktive Inhalte:
$P(X = k)$

5.3.9 Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, x_3...$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	p_4	..

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3....$

$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$

Varianz:

$Var(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + ...$

$Var(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

x	-1	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{1}{5}$

Erwartungswert:

$E(x) = -1 \cdot \frac{2}{25} + 0 \cdot \frac{3}{25} + 1 \cdot \frac{7}{50} + 2 \cdot \frac{6}{25} + 3 \cdot \frac{11}{50} + 4 \cdot \frac{1}{5}$

$E(x) = \mu = 2$

Varianz:

$Var(x) = (-1-2)^2 \cdot \frac{2}{25} + (0-2)^2 \cdot \frac{3}{25} + (1-2)^2 \cdot \frac{7}{50}$
$+(2-2)^2 \cdot \frac{6}{25} + (3-2)^2 \cdot \frac{11}{50} + (4-2)^2 \cdot \frac{1}{5} = 2\frac{9}{25}$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{2\frac{9}{25}} = 1,54$

Binomialverteilung

Binomialverteilung B(n;p)

X	0	1	2	3	..
$P(X)$	$B(n;p;0)$	$B(n;p;1)$	$B(n;p;2)$	$B(n;p;3)$	..

Erwartungswert:

$E(x) = \mu = n \cdot p$

Varianz:

$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung:

$\sigma = \sqrt{Var(x)}$

Binomialverteilung
$n = 50 \qquad p = 0,25$
Erwartungswert:
$E(x) = \mu = n \cdot p$
$E(x) = \mu = 50 \cdot \frac{1}{4}$
$E(x) = 12\frac{1}{2}$
Varianz:
$Var(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$
$Var(x) = 50 \cdot \frac{1}{4} \cdot (1 - \frac{1}{4})$
$Var(x) = 9\frac{3}{8}$
Standardabweichung:
$\sigma = \sqrt{9\frac{3}{8}} = 3,06$

Interaktive Inhalte:
Statistik Binomial

5.4 Testen von Hypothesen

5.4.1 Einseitiger Signifikanztest

Ist ein Würfel gezinkt?
Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist bei einem nicht gezinkten Würfel: $p = \frac{1}{6}$ (Nullhypothese). Bei einem gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit für eine Sechs: $p > \frac{1}{6}$ (Gegenhypothese und Rechtsseitiger Signifikanztest). Der zu testende Würfel wird 100 mal geworfen (Stichprobenlänge). Man hält den Würfel für nicht gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser höchstens 20 ist (Annahmebereich der Nullhypothese). Man hält den Würfel für gezinkt, wenn die Anzahl der gewürfelten Sechser mindestens 21 ist (Ablehungsbereich der Nullhypothese).
Zwei Fehler sind bei der Entscheidung möglich:

1. Der Würfel ist nicht gezinkt. Mit viel Glück kann man auch mit einem nicht gezinkten Würfel mehr als 20 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für gezinkt, obwohl er es nicht ist.(Fehler 1. Art)

2. Der Würfel ist gezinkt. Mit viel Pech kann man auch mit einem gezinkten Würfel weniger als 21 mal die Sechs würfeln. Man hält den Würfel für nicht gezinkt, obwohl er es ist. (Fehler 2. Art).

Ziel ist es die Wahrscheinlichkeit für die Fehler zu berechnen (Irrtumswahrscheinlichkeit).

Definitionen

- Testgröße: Binomial verteilte Zufallsgröße X
- Nullhypothese H_0: Vermutete Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße X
- Gegenhypothese H_1: Alternative Wahrscheinlichkeit
- Stichprobenlänge n : Anzahl der durchgeführten Versuche
- Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich für die Nullhypothese
- Fehler 1. Art (α-Fehler): H_0 wird irrtümlich abgelehnt. Entscheidung gegen H_0, aber H_0 ist richtig.
- Fehler 2. Art (β-Fehler): H_0 wird irrtümlich angenommen. Entscheidung für H_0, aber H_0 ist nicht richtig.
- Irrtumswahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 Art. Berechnung durch: $\alpha = P_{p_0}^{n}($ Ablehnungsbereich von $H_0)$
- Signifikanzniveau: maximale Irrtumswahrscheinlichkeit

Testgröße: Anzahl der Sechsen beim Würfeln
Stichprobenlänge $n = 100$
Nullhypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{6}$
Gegenhypothese $H_1 : p > \frac{1}{6}$
Annahmebereich: $A = \{0..20\}$
Annahmebereich: $\overline{A} = \{21..100\}$

Rechtsseitiger Signifikanztest

	Annahmebereich	Ablehnungsbereich
	$A=\{0.....k\}$	$\overline{A}=\{k+1.....n\}$
$H_0: p \leq p_0$	richtig	Fehler 1. Art
$H_1: p > p_0$	Fehler 2. Art	richtig

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 ,Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P_{p_0}^n(\overline{A})$

$\alpha = P_{p_0}^n(X \geq k+1) = \sum_{i=k+1}^{n} B(n;p_0;i)$

$\alpha = 1 - P_{p_0}^n(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} B(n;p_0;i) = 1 - F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n,H_0,Signifikanzniveau

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

$P_{p_0}^n(\overline{A}) \leq \alpha$

$P_{p_0}^n(X \geq k+1) \leq \alpha$

$1 - P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$

$P_{p_0}^n(X \leq k) \geq 1 - \alpha$

Aufgabentyp 1
Gegeben:
$n = 100, H_0: p \leq \frac{1}{6}$
$A\{0..20\}, \overline{A} = \{21..100\}$
Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art
$\alpha = P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \geq 21) = \sum_{i=21}^{100} B(100;\frac{1}{6};i)$
$\alpha = 1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq 20) = 1 - \sum_{i=0}^{20} B(100;\frac{1}{6};i) = 1 - F(20)$
Aus Tafelwerk: $\sum_{i=0}^{20} B(100;\frac{1}{6};i) = F(20) = 0,84811$
$1 - 0,84811 = 0,15189$
Irrtumswahrscheinlichkeit $= 15,19\%$

Aufgabentyp 2
Gegeben:
$n = 100; H_0: p = \frac{1}{6}$
Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$
Gesucht: Entscheidungsregel
$A\{0..k\}; \overline{A}\{k+1..100\}$
$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \geq k+1) \leq 0,05$
$\sum_{i=k+1}^{100} B(100;\frac{1}{6};i) \leq 0,05$
$1 - P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \leq 0,05$
$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \geq 1 - 0,05$
$P_{\frac{1}{6}}^{100}(X \leq k) \geq 0,95$
Aus Tafelwerk: $k = 23$
Entscheidungsregel
$A\{0..23\}; \overline{A}\{24..100\}$

Linksseitiger Signifikanztest

	Ablehnungsbereich	Annahmebereich
	$\overline{A}=\{0.....k\}$	$A=\{k+1.....n\}$
$H_0: p \geq p_0$	Fehler 1. Art	richtig
$H_1: p < p_0$	richtig	Fehler 2. Art

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0, Annahme-und Ablehnungsbereich

Gesucht:Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$\alpha = P_{p_0}^n(\overline{A})$

$\alpha = P_{p_0}^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n;p_0;i) = F(k)$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0,Signifikanzniveau α

Gesucht:Annahme-und Ablehnungsbereich

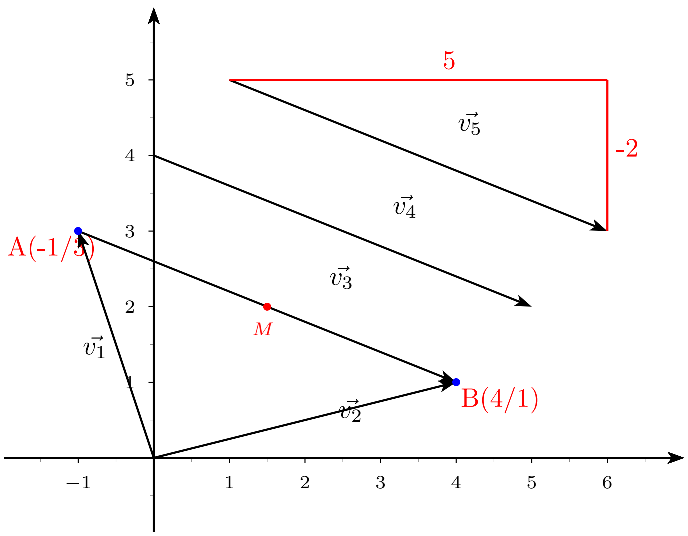
$P_{p_0}^n(\overline{A}) \leq \alpha$

$P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$

6 Analytische Geometrie

6.1 Vektorrechung in der Ebene

6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

• Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

• Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$

• Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4} = \vec{v_5}$
$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(x_a/y_a) \quad B(x_b/y_b)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-1/3) \quad B(4/1)$
Vektor zwischen zwei Punkten
$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{29}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 5,39$$

Steigung der Graden AB

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Steigung der Graden AB
$m = \frac{y}{x}$
Winkel des Vektors mit der x-Achse
$\tan\alpha = m$

Steigng der Geraden AB
$m = \frac{-2}{5}$

Mittelpunkt der Strecke AB

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}\right)$
$M(\frac{x_a+x_b}{2} / \frac{y_a+y_b}{2})$

Mittelpunkt der Strecke AB
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$
$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$
$M(1\frac{1}{2}/2)$

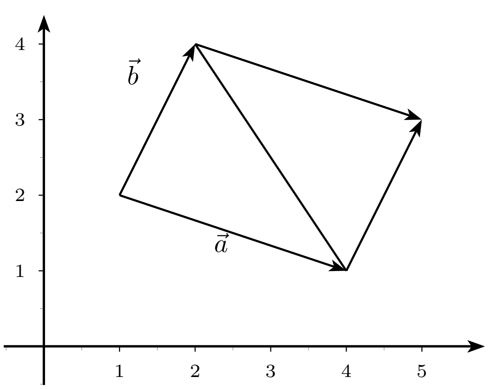
Vektorkette

Punkt: $A(x_a/y_a)$
Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \qquad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A(-1/3) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
$B(4/1)$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel



$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Steigung der Vektoren

$m_a = \frac{y_a}{x_a} \qquad m_a = \frac{y_b}{x_b}$

$m_a = m_b \Rightarrow$ Vektoren sind parallel

Steigung

$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{1} = 2$

Skalarprodukt

$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$

Senkrechte Vektoren:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \circ \vec{b} == \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + -1 \cdot 2 = 1$

Fläche aus 2 Vektoren

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \right)$

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - -1 \cdot 1 = 7$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 3\frac{1}{2}$

Winkel zwischen Vektoren

$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$

$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$

Schnittwinkel:

$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$

$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 1 + -1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$

$\cos \alpha = \left| \frac{1}{3,16 \cdot 2,24} \right|$

$\cos \alpha = |0,141|$

$\alpha = 81,9$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.1.3 Abbildungen

Lineare Abbildung in Matrixform - Koordinatenform

Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + e \\ c \cdot x + d \cdot y + f \end{pmatrix}$$

$$x' = a \cdot x + b \cdot y + e \qquad y' = c \cdot x + d \cdot y + f$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Verschiebung

Punkt: $P(x_p/y_p)$

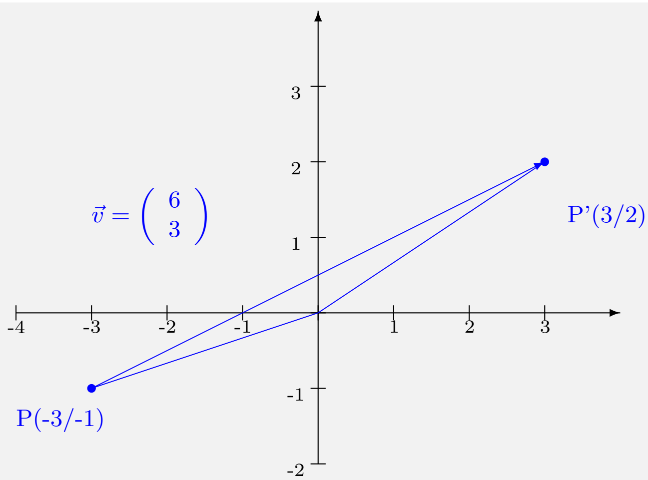
Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$P(-3/-1) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P'(3/2)$

Spiegelung an den Koordinatenachsen

Spiegelung an der x–Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \qquad y' = -y$$

Spiegelung an der y–Achse

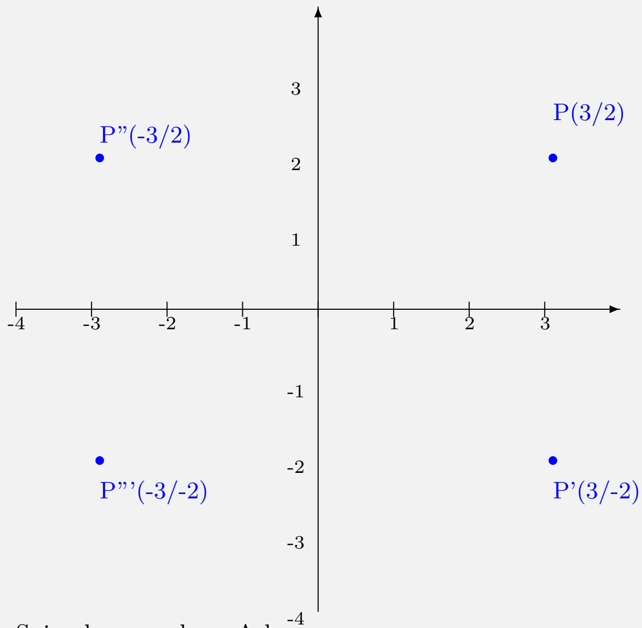
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = y$$

Spiegelung am Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = -y$$



Spiegelung an der x-Achse
$P(3/2) \longmapsto P'(3/-2)$
Spiegelung an der y-Achse
$P(3/2) \longmapsto P''(-3/2)$
Spiegelung am Ursprung
$P(3/2) \longmapsto P'''(-3/-2)$

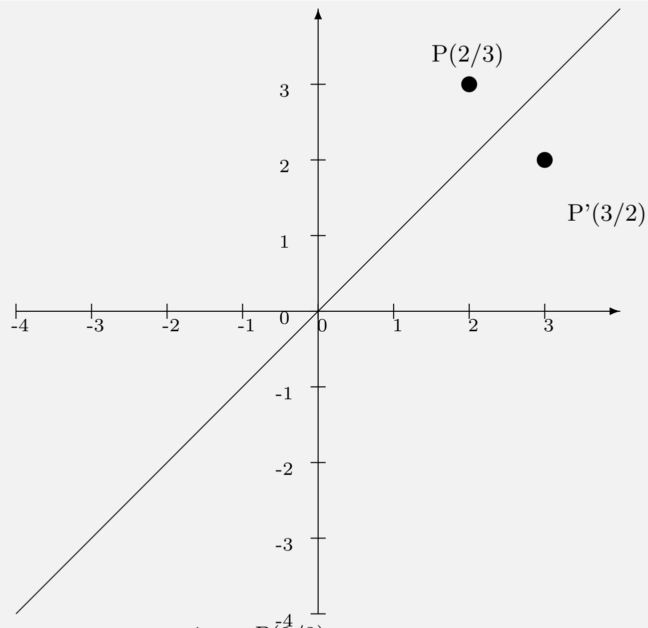
Spiegelung an der Urspungsgerade

$$y = m \cdot x \qquad \tan\alpha = m$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \qquad y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$



$y = x \qquad m = 1 \qquad P(2/3)$
$tan\alpha = 1 \qquad \alpha = 45°$
$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha$
$x' = 2 \cdot \cos 2 \cdot 45° + 3 \cdot \sin 2 \cdot 45°$
$x' = 3$
$y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$
$y' = 2 \cdot \sin 2 \cdot 45° - 3 \cdot \cos 2 \cdot 45°$
$y' = 2$
$P(2/3) \longmapsto P'(3/2)$

Zentrische Streckung

Streckzentrum: $Z(0/0)$
Streckungsfaktor :k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Streckzentrum: $Z(x_z/y_z)$
Streckungsfaktor:k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$
Vektorform

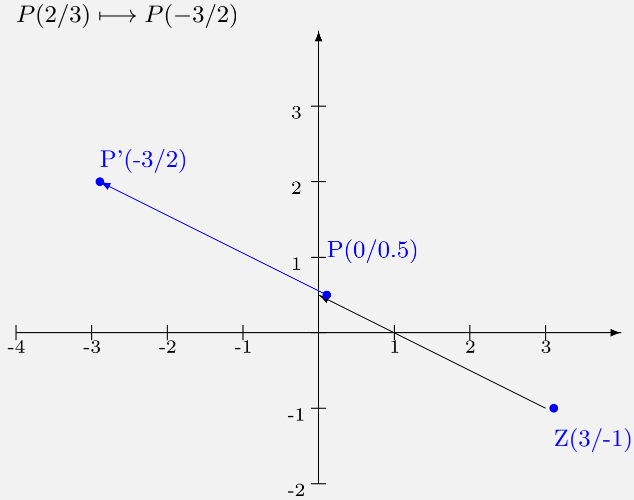
$$\vec{ZP'} = k \cdot \vec{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} - x_Z \\ y_{P'} - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

$P(2/3) \longmapsto P(-3/2)$



Streckzentrum: $Z(3/-1)$
Streckungsfaktor:2
Urpunkt: $P(0/0,5)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0,5-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P'(-3/2)$

Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha \qquad x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha$$

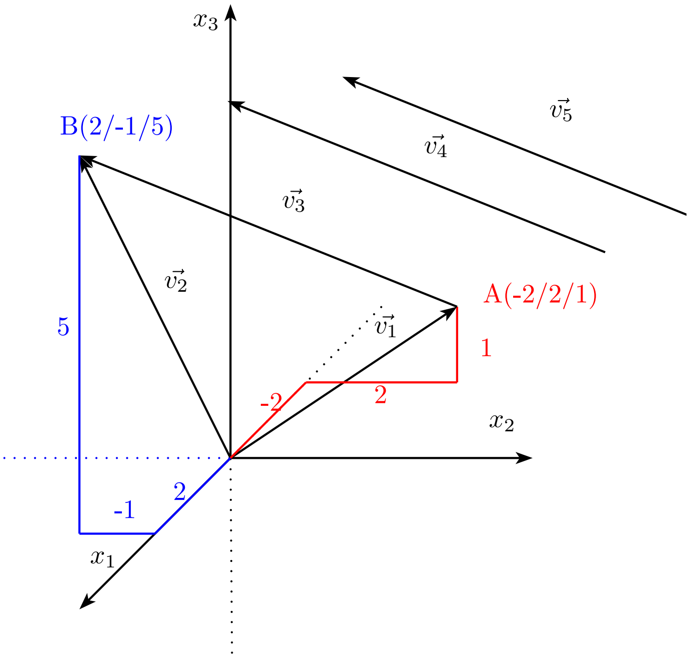
Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k\cdot y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \qquad y' = k\cdot y$$

6.2 Vektor

6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

• Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

• Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

• Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4}$
$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(a_1/a_2/a_3) \quad B(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-2/2/1) \quad B(2/-1/5)$
Vektor zwischen zwei Punkten

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{41}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 6,4$$

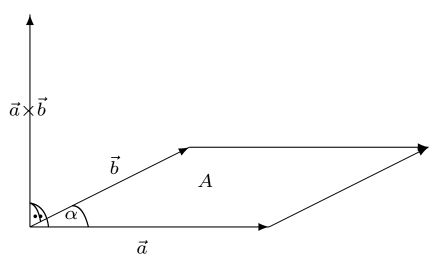
Mittelpunkt der Strecke AB

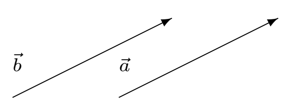
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$
$$M\left(\tfrac{a_1+b_1}{2} / \tfrac{a_2+b_2}{2} / \tfrac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Mittelpunkt der Strecke AB
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$M(0/\tfrac{1}{2}/3)$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Länge der Vektoren:
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$|\vec{a}| = 3$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = 3$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$
$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Senkrechte Vektoren:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Skalarprodukt:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$
$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$

$|\vec{c}| = 5,657$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$
$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$
$$\cos\alpha = \left|\frac{-7}{3 \cdot 3}\right|$$
$$\cos\alpha = \left|-\tfrac{7}{9}\right|$$
$\alpha = 38,942$

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{array}{lcllll} a_1 & = & b_1 k & / : b_1 & \Rightarrow k_1 \\ a_2 & = & b_2 k & / : b_2 & \Rightarrow k_2 \\ a_3 & = & b_3 k & / : b_3 & \Rightarrow k_3 \end{array}$$

$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$

Vekoren sind linear abhängig - parallel

nicht alle k gleich $\Rightarrow$

Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

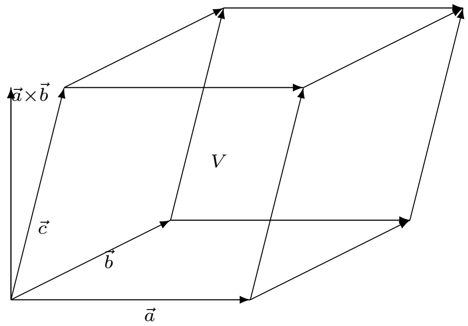
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{lcllll} 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \\ 1 & = & 1k & / : 1 & \Rightarrow k = 1 \\ 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \end{array}$$

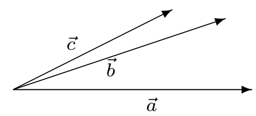
$\Rightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Interaktive Inhalte:

hier klicken

6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität





$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Spatprodukt: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=$

$$\left(\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Vektorprodukt von $\vec{a},\vec{b}$ skalar multipliziert mit $\vec{c}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3\cdot2-4\cdot(-7)\\4\cdot(-4)-2\cdot3\\3\cdot(-7)-(-3)\cdot(-4)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}22\\-22\\-33\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}=44$$

Spatprodukt = Wert der Determinante

Spatprodukt: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=a_1\cdot b_2\cdot c_3+b1\cdot c2\cdot a_3+c1\cdot a_2\cdot b_3$

$-c1\cdot b2\cdot a_3-a_1\cdot c2\cdot b3-b1\cdot a_2\cdot c_3$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}3&-4&7\\-3&-7&2\\4&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-4\\-3&-7\\4&2\end{matrix}$$

$D=3\cdot(-7)\cdot2+(-4)\cdot2\cdot4+7\cdot(-3)\cdot2$

$-7\cdot(-7)\cdot4-3\cdot2\cdot2-(-4)\cdot(-3)\cdot2$

$D=44$

Spatprodukt - Volumen

•Volumen von Prisma oder Spat

$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

•Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:

Quadrat,Rechteck,Parallelogramm

$V=\frac{1}{3}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

• Volumen ein dreiseitigen Pyramide

$V=\frac{1}{6}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}-4\\-7\\2\end{pmatrix}\quad \vec{c}=\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$V=\begin{vmatrix}3&-4&7\\-3&-7&2\\4&2&2\end{vmatrix}\begin{matrix}3&-4\\-3&-7\\4&2\end{matrix}$$

$V=3\cdot(-7)\cdot2+(-4)\cdot2\cdot4+7\cdot(-3)\cdot2$

$-7\cdot(-7)\cdot4-3\cdot2\cdot2-(-4)\cdot(-3)\cdot2$

$V=44$

Eigenschaften von 3 Vektoren

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear abhängig
- liegen in einer Ebene (komplanar)
- sind keine Basisvektoren

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 44$

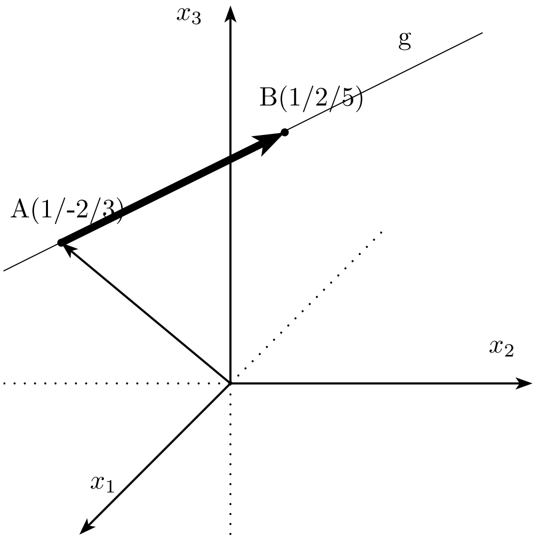
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.3 Gerade

6.3.1 Gerade aus 2 Punkten



Punkte: $A(a_1/a_2/a_3) \quad B(b_1/b_2/b_3)$

Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(1/-3/3) \quad B(1/2/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+3 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden

$x_1 - \text{Achse}$ $\quad$ $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

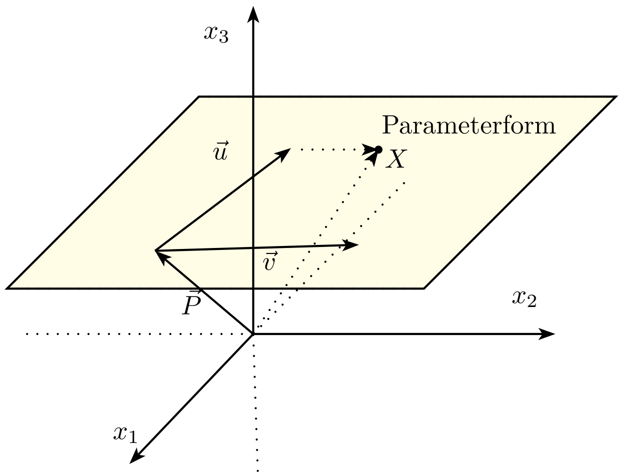
$x_2 - \text{Achse}$ $\quad$ $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

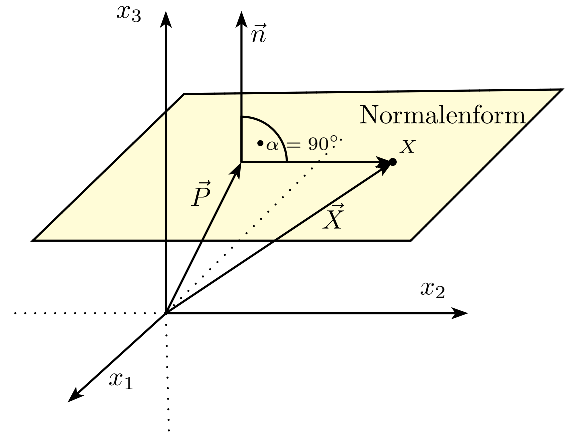
$x_3 - \text{Achse}$ $\quad$ $\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.4 Ebene

6.4.1 Parameterform - Normalenform





Parameterform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)

$\vec{u}, \vec{v}$ - Richtungsvektoren

λ, σ-Parameter

$\vec{x} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \vec{v}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Normalenform - Koordinatenform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

$\vec{n}$ - Normalenvektor

$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot \vec{p}) = 0$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

$n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$

$n_1 x1 - n1p1 + n_2 x_2 - n_2 p_2 + n_3 x_3 - n_3 p_3 = 0$

$c = -(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3)$

$n_1 x1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + c = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt in der Ebene $P(2/-1/1)$

Nomalenform:

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot \vec{p}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

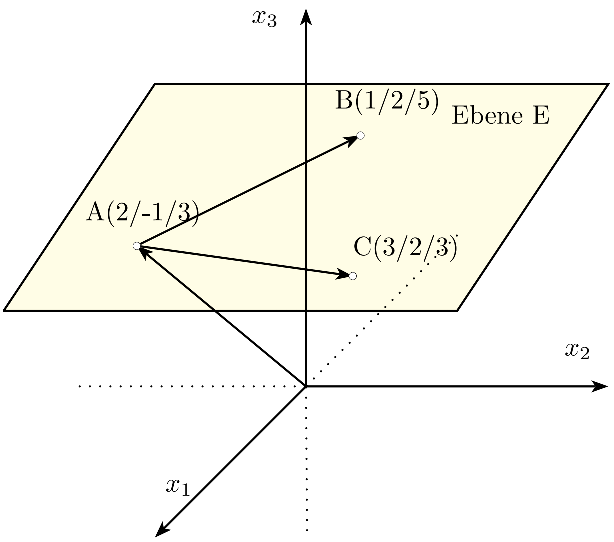
$1(x_1 - 2) + 2(x_2 + 1) + 3(x_3 - 1) = 0$

$x1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

Besondere Ebenen

Ebene	Parameterform	Koordinatenform
$x1-x2$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$	$x_3=0$
$x1-x3$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$x_2=0$
$x2-x3$	$\vec{x}=\lambda\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$	$x_1=0$

6.4.2 Ebenengleichung aufstellen



Ebene aus 3 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)\quad B(b_1/b_2/b_3)\quad C(c_1/c_2/c_3)$

Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Ebene aus drei Punkten:

Richtungsvektor: $\vec{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\vec{AC}=\begin{pmatrix}c_1-a_1\\c_2-a_2\\c_3-a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$$

Punkte: $A(2/-1/3)\quad B(1/2/5)\quad C(3/2/3)$

Ebene aus drei Punkten:

$$\vec{AB}=\begin{pmatrix}1-2\\2+1\\5-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC}=\begin{pmatrix}3-2\\2+1\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$$

Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkte darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt: $C(2/0/1)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei parallelen Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muss ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} 2 &=& +4k & /:4 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 &=& +0k & /:0 \quad \Rightarrow k = beliebig \\ -1 &=& -2k & /:-2 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt: $A(3/4/5)$

$$\begin{array}{rcll} 3 &=& 1 \quad +2\lambda & /-1 \\ 4 &=& 3 \quad +0\lambda & /-3 \\ 5 &=& 0 \quad -1\lambda & /-0 \\ 2 &=& 2\lambda & /:2 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 &=& 0\lambda & \quad \Rightarrow \text{falsch} \\ 5 &=& -1\lambda & /:-1 \quad \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

$\Rightarrow$

Geraden sind echt parallel

2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(5, -9, 0)$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Interaktive Inhalte:
3 Punkte | Punkt und Gerade | Parallele Geraden

6.4.3 Parameterform - Koordinatenform

1. Methode: Determinante

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 \end{matrix} = 0$$

$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b1 \cdot c2 \cdot (x_3 - a_3) +$
$c1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c1 \cdot b2 \cdot (x_3 - a_3) -$
$(x_1 - a_1) \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$

Koordinatenform:
$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & -2 & 2 \\ x_2 + 3 & 4 & -5 \\ x_3 - 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} x_1 - 1 & -2 \\ x_2 + 3 & 4 \\ x_3 - 2 & 3 \end{matrix} = 0$$

$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 3) \cdot 3 -$
$2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot (-5) \cdot 3 - (-2) \cdot (x_2 + 3) \cdot 0 = 0$
$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

Koordinatenform:
$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

2. Methode: Vektorprodukt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + k = 0$

k berechnen

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-7) + k = 0$

$k = -4$

Koordinatenform

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$

Interaktive Inhalte:
Determinante Vektorprodukt

6.4.4 Koordinatenform - Parameterform

1. Methode

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} x_1 - \frac{n_2}{n_3} x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} \lambda - \frac{n_2}{n_3} \sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{n_3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{2}{2} - \frac{4}{2} x_1 - \frac{8}{2} x_2$

$x_3 = 1 - 2x_1 - 4x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = 1 - 2\lambda - 4\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$4x_1 - 2 = 0$

•x_2 durch einen Parameter ersetzen

$x_2 = \lambda$

•x_3 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_3 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_1 auflösen

$x_1 = \frac{1}{2}$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = \frac{1}{2} + 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_3 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Methode

- Drei beliebige Punkte, die in der Ebene liegen ermitteln.
- Die Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.
- Ebenengleichung aus 3 Punkten aufstellen.

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$
• $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$ frei wählen und in die Ebenengleichung einsetzen. $\Rightarrow x_3 = 1$ und $P_1(0/0/1)$
• 2 weitere Punkte ermitteln: $P_2(1/0/-1) \qquad P_3(0/1/-3)$
• Die Richtungvektoren sind linear unabhängig:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$
• Parameterform der Ebene
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:
$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$
Normalenvektor
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
Hessesche Normalenform:
$k1 < 0$
HNF: $\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$
$k1 > 0$
HNF: $\frac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

Koordinatenform:
$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 6^2 + 2^2}$
$|\vec{n}| = 16,3$
Hessesche Normalenform:
HNF: $\frac{15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1}{16,3} = 0$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.5 Kugel

6.5.1 Kugelgleichung

$M(m_1/m_2/m_3)$ - Mittelpunkt der Kugel

r - Radius der Kugel

$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel

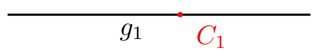
Kugelgleichung:

$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

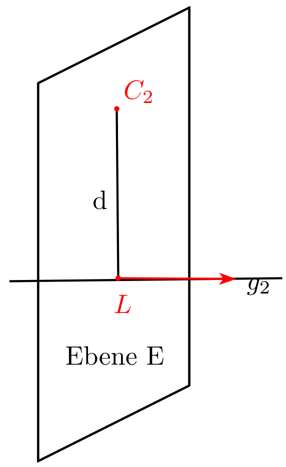
$M(3/2/-4) -$ Mittelpunkt der Kugel
$r = 6 -$ Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3) -$ beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = 6^2$

6.6 Lagebeziehung

6.6.1 Punkt - Gerade



Punkt C_1 liegt auf der Geraden g_1



Abstand d des Punktes C_2 von der Geraden g_2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

$$\begin{array}{lllll} c_1 = & a_1 & + & b_1\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_1 \\ c_1 = & a_2 & + & b_2\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 \\ c_1 = & a_3 & + & b_3\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_3 \end{array}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle λ gleich $\Rightarrow$

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors $\vec{LC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Punkt: } C(7,9,-6)$$

$$\begin{array}{lllll} 7 & = & 1 & -2\lambda & /-1 \\ 9 & = & 3 & -2\lambda & /-3 \\ -6 & = & -3 & +2\lambda & /+3 \\ 6 & = & -2\lambda & /:-2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ 6 & = & -2\lambda & /:-2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ -3 & = & 2\lambda & /:2 & \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktens berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$

C ist Punkt in der Ebene

$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot (-6) + k = 0$

$k = 44$

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{array}{lll} x_1 = & 1 & -2\lambda \\ x_2 = & 3 & -2\lambda \\ x_3 = & -3 & +2\lambda \end{array}$$

$-2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 = 0$

$12\lambda + 30 = 0$

$\lambda = \frac{-30}{12}$

$\lambda = -2\frac{1}{2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: $L(6,8,-8)$

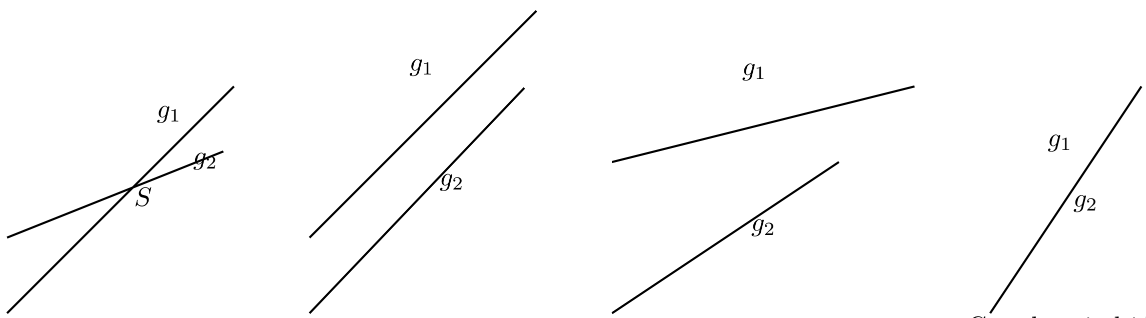
$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$\left|\vec{CL}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

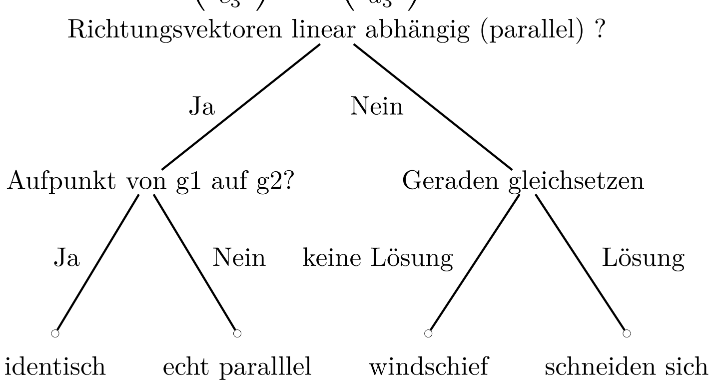
6.6.2 Gerade - Gerade



Geraden schneiden sich | Geraden sind parallel | Geraden sind windschief | Geraden sind identisch

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$



Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & = & -4k & /:-4 & \Rightarrow k = -1 \\ -7 & = & -4k & /:-4 & \Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \\ -8 & = & -3k & /:-3 & \Rightarrow k = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & +4\lambda & = & 9 & -4\sigma & /-1 \quad /+4\sigma \\ -2 & -7\lambda & = & -5 & -4\sigma & /+2 \quad /+4\sigma \\ 8 & -8\lambda & = & 3 & -3\sigma & /-8 \quad /+3\sigma \end{array}$$

$I \quad 4\lambda + 4\sigma = 8$
$II \quad -7\lambda + 4\sigma = -3$
$III \quad -8\lambda - 3\sigma = -5$

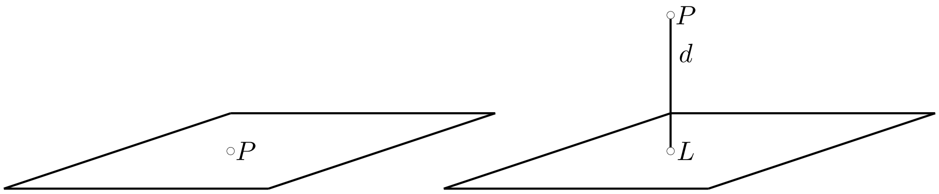
Aus den Gleichungen I und II λ und σ berechnen
$\sigma = 1$
$\lambda = 1$
λ und σ in die verbleibende Gleichung einsetzen
$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$
$0 = 0$
λ oder σ in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(5, -9, 0)$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform)



Punkt liegt in der Ebene

Punkt liegt nicht in der Ebene

Punkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$

- Liegt der Punkt in der Ebene?

Punkt in die Ebene einsetzen.

Gleichung nach Umformung: $0 = 0 \Rightarrow$ Punkt liegt in der Ebene

- Abstand Punkt - Ebene

Punkt in die HNF einsetzen.

Punkt: $A(1/2/0)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 = 0$
$0 = 0$
Punkt liegt in der Ebene

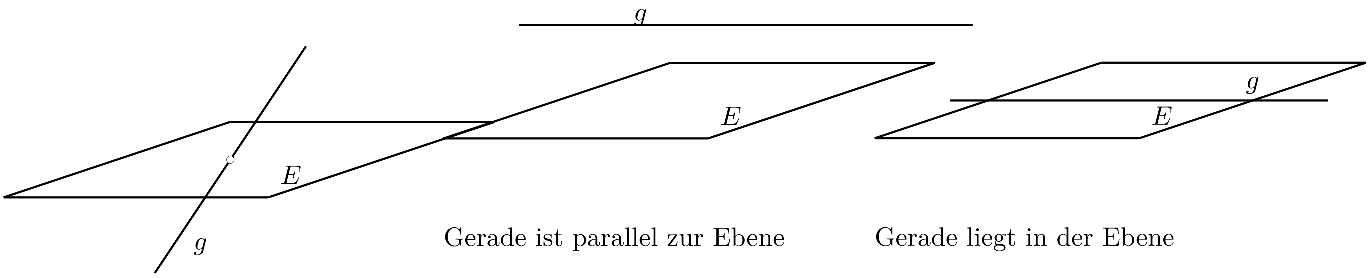
Punkt: $A(2/-4/3)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7 = 0$
$20 = 0$
Punkt liegt nicht in der Ebene
Abstand des Punktes von der Ebene
Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF
$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$
$|\vec{n}| = 3,32$
HNF:
$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$
Punkt in HNF:
$d = |\frac{-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32}|$
$d = |-6,03|$
$d = 6,03$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform)



Gerade ist parallel zur Ebene

Gerade liegt in der Ebene

Gerade schneidet Ebene

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

Gerade1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda$

$x_2 = a_2 + b_2\lambda$

$x_3 = a_3 + b_3\lambda$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

• Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

• Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

• Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung:$0 = 0$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 10 = 0$

$x_1 = \quad 3 \quad +4\lambda$

$x_2 = \quad 5 \quad +5\lambda$

$x_3 = \quad 7 \quad +5\lambda$

$1(3 + 4\lambda) - 2(5 + 5\lambda) + 5(7 + 5\lambda) + 10 = 0$

$19\lambda + 38 = 0$

$\lambda = \frac{-38}{19}$

$\lambda = -2$

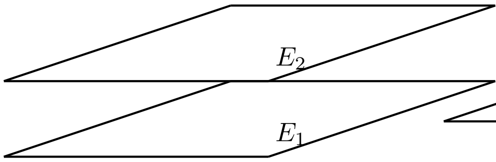
$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt: $S(-5, -5, -3)$

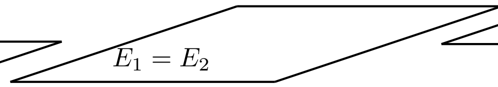
Interaktive Inhalte:

hier klicken

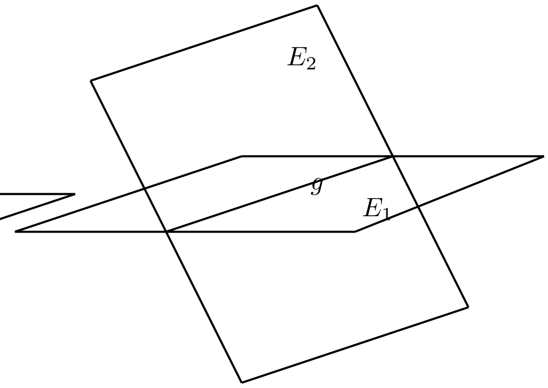
6.6.5 Ebene - Ebene



Ebenen sind parallel



Ebenen sind identisch



Ebenen schneiden sich

Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$

Ebene1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma$
$x_2 = a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma$
$x_3 = a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma)+$
$n_2(a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma)+$
$n_3(a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma) + k1 = 0$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

- Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. λ oder σ in die Parameterform einsetzen

- Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

- Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $0 = 0$

Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0 = 0$

$$\begin{array}{llll} x_1 = & -2 & +1\lambda & +0\sigma \\ x_2 = & -4 & +2\lambda & -1\sigma \\ x_3 = & 2 & +2\lambda & -1\sigma \end{array}$$

$1(-2 + 1\lambda + 0\sigma) + 1(-4 + 2\lambda - 1\sigma) + 0(2 + 2\lambda - 2\sigma) + 0 = 0$

$3\lambda - 1\sigma - 6 = 0$

$\sigma = \frac{-3\lambda+6}{-1}$

$\sigma = 3\lambda - 6$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (3\lambda - 6) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Koordinatenform - Koordinatenform

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Interaktive Inhalte:
hier klicken

7 Tabellen

7.1 Umrechnungen

Interaktive Umrechnungen
hier klicken

7.1.1 Zehnerpotenz

Eins	10^0	1
Zehn	10^1	10
Hundert	10^2	100
Tausend	10^3	1000
Zehntausend	10^4	10000
Hunderttausend	10^5	100000
Million	10^6	1000000
	10^7	10000000
	10^8	100000000
Milliarde	10^9	1000000000
	10^{10}	10000000000
	10^{11}	100000000000
Billion	10^{12}	1000000000000
	10^{13}	10000000000000
	10^{14}	100000000000000
Billiarde	10^{15}	1000000000000000
	10^{16}	10000000000000000
	10^{17}	100000000000000000
Trillion	10^{18}	1000000000000000000
	10^{19}	10000000000000000000
	10^{20}	100000000000000000000
Trilliarde	10^{21}	1000000000000000000000
	10^{22}	10000000000000000000000
	10^{23}	100000000000000000000000
Quadrillion	10^{24}	1000000000000000000000000

Eins	10^0	1
Zehntel	10^{-1}	$0,1$
Hundertstel	10^{-2}	$0,01$
Tausendstel	10^{-3}	$0,001$
Zehntausendstel	10^{-4}	$0,0001$
Hunderttausendstel	10^{-5}	$0,00001$
Millionstel	10^{-6}	$0,000001$
	10^{-7}	$0,0000001$
	10^{-8}	$0,00000001$
	10^{-9}	$0,000000001$
	10^{-10}	$0,0000000001$
	10^{-11}	$0,00000000001$
	10^{-12}	$0,000000000001$
	10^{-13}	$0,0000000000001$
	10^{-14}	$0,00000000000001$
	10^{-15}	$0,000000000000001$
	10^{-16}	$0,0000000000000001$
	10^{-17}	$0,00000000000000001$
	10^{-18}	$0,000000000000000001$
	10^{-19}	$0,0000000000000000001$
	10^{-20}	$0,00000000000000000001$
	10^{-21}	$0,000000000000000000001$
	10^{-22}	$0,0000000000000000000001$
	10^{-23}	$0,00000000000000000000001$
	10^{-24}	$0,000000000000000000000001$

7.1.2 Längen

m - Meter dm - Dezimeter cm - Zentimeter mm - Millimeter μm - Mikrometer nm - Nanometer pm - Pikometer km - Kilometer

$$\begin{tikzcd}
km \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & m \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & dm \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & cm \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & mm \arrow[l, bend left, ": 10"]
\end{tikzcd}$$

	m	dm	cm	mm	μm	nm	pm	km
m	1	10	100	1000	10^6	10^9	10^{12}	$0,001$
dm	$0,1$	1	10	100	10^5	10^8	10^{11}	$0,0001$
cm	$0,01$	$0,1$	1	10	10^4	10^7	10^{10}	10^{-5}
mm	$0,001$	$0,01$	$0,1$	1	1000	10^6	10^9	10^{-6}
μm	10^{-6}	10^{-5}	$0,0001$	$0,001$	1	1000	10^6	10^{-9}
nm	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	$0,001$	1	1000	10^{-12}
pm	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	10^{-15}
km	1000	10^4	10^5	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	1

7.1.3 Flächen

m^2 - Quadratmeter dm^2 - Quadratdezimeter cm^2 - Quadratzentimeter mm^2 - Quadratmillimeter a - Ar ha - Hektar km^2 - Quadratkilometer

$$\begin{tikzcd} km^2 \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & ha^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & a^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & m^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & dm^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & cm^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 100"] & mm^2 \arrow[l, bend left, ": 100"] \end{tikzcd}$$

	m^2	dm^2	cm^2	mm^2	a	ha	km^2
m^2	1	100	10^4	10^6	$0,01$	$0,0001$	10^{-6}
dm^2	$0,01$	1	100	10^4	$0,0001$	10^{-6}	10^{-8}
cm^2	$0,0001$	$0,01$	1	100	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
mm^2	10^{-6}	$0,0001$	$0,01$	1	10^{-8}	10^{-10}	10^{-12}
a	100	10^4	10^6	10^8	1	$0,01$	$0,0001$
ha	10^4	10^6	10^8	10^{10}	100	1	$0,01$
km^2	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^4	100	1

7.1.4 Volumen

m^3 - Kubikmeter dm^3 - Kubikdezimeter cm^3 - Kubikzentimeter mm^3 - Kubikmillimeter l - Liter hl - Hektoliter ml - Milliliter

$$\begin{tikzcd} km^3 \arrow[r, bend left, "\cdot 10^9"] & m^3 \arrow[l, bend left, ": 10^9"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & dm^3 \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & cm^3 \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & mm^3 \arrow[l, bend left, ": 1000"] \end{tikzcd}$$

	m^3	dm^3	cm^3	mm^3	l	hl	ml
m^3	1	1000	10^6	10^9	1000	10	10^6
dm^3	$0,001$	1	1000	10^6	1	$0,01$	1000
cm^3	10^{-6}	$0,001$	1	1000	$0,001$	10^{-5}	1
mm^3	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1	10^{-6}	10^{-8}	$0,001$
l	$0,001$	1	1000	10^6	1	$0,01$	1000
hl	$0,1$	100	10^5	10^8	100	1	10^5
ml	10^{-6}	$0,001$	1	1000	$0,001$	10^{-5}	1

7.1.5 Zeit

s - Sekunden min - Minuten h - Stunden ms - Millisekunden μs - Mikrosekunden ns - Nanosekunden ps - Pikosekunden

	s	min	h	ms	μs	ns	ps
s	1	$0,01667$	$0,0002778$	1000	10^6	10^9	10^{12}
min	60	1	$0,01667$	$6 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^7$	$6 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{13}$
h	3600	60	1	$3,6 \cdot 10^6$	$3,6 \cdot 10^9$	$3,6 \cdot 10^{12}$	$3,6 \cdot 10^{15}$
ms	$0,001$	$1,667 \cdot 10^{-5}$	$2,778 \cdot 10^{-7}$	1	1000	10^6	10^9
μs	10^{-6}	$1,667 \cdot 10^{-8}$	$2,778 \cdot 10^{-10}$	$0,001$	1	1000	10^6
ns	10^{-9}	$1,667 \cdot 10^{-11}$	$2,778 \cdot 10^{-13}$	10^{-6}	$0,001$	1	1000
ps	10^{-12}	$1,667 \cdot 10^{-14}$	$2,778 \cdot 10^{-16}$	10^{-9}	10^{-6}	$0,001$	1

7.1.6 Winkel

° - Grad (360°) rad - Radiant (Bogenmaß) $mrad$ - Milliradiant $'$ - Winkelminute $''$ - Winkelsekunde gon - Neugrad

	°	$'$	$''$	gon	rad	$mrad$
°	1	60	3600	$1,111$	$0,01745$	$1,745 \cdot 10^{-5}$
$'$	$0,01667$	1	60	$0,01852$	$0,0002909$	$2,909 \cdot 10^{-7}$
$''$	$0,0002778$	$0,01667$	1	$0,0003086$	$4,848 \cdot 10^{-6}$	$4,848 \cdot 10^{-9}$
gon	$0,9$	54	3240	1	$0,01571$	$1,571 \cdot 10^{-5}$
rad	$57,3$	3438	$2,063 \cdot 10^5$	$63,66$	1	$0,001$
$mrad$	$5,73 \cdot 10^4$	$3,438 \cdot 10^6$	$2,063 \cdot 10^8$	$6,366 \cdot 10^4$	1000	1

7.1.7 Dezimale Einheiten

B - Bezugsgröße d - Dezi c - Zenti m - Milli μ - Mikro n - Nano p - Pico f - Femto a - Atto da - Deka h - Hekto k - Kilo M - Mega G - Giga T - Tera P - Peta E - Exa

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & P \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & T \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & G \arrow[l, bend left, ": 100"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & M \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & k \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & h \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & da \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & b \arrow[l, bend left, ": 10"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & d \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & c \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 10"] & m \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & \mu \arrow[l, bend left, ": 10"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & n \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & p \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & f \arrow[l, bend left, ": 1000"] \arrow[r, bend left, "\cdot 1000"] & a \arrow[l, bend left, ": 1000"]
\end{tikzcd}$$

B		d	c	m	μ	n	p	f	a	da	h	k	M	G	T	P	E
B	1	10	100	1000	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	0, 1	0, 01	0, 001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}
d	0, 1	1	10	100	10^{5}	10^{8}	10^{11}	10^{14}	10^{17}	0, 01	0, 001	0, 0001	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-16}	10^{-19}
c	0, 01	0, 1	1	10	10^{4}	10^{7}	10^{10}	10^{13}	10^{16}	0, 001	0, 0001	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}	10^{-20}
m	0, 001	0, 01	0, 1	1	1000	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	0, 0001	10^{-5}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}
μ	10^{-6}	10^{-5}	0, 0001	0, 001	1	1000	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}
n	10^{-9}	10^{-8}	10^{-7}	10^{-6}	0, 001	1	1000	10^{6}	10^{9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}
p	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-9}	10^{-6}	0, 001	1	1000	10^{6}	10^{-13}	10^{-14}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}
f	10^{-15}	10^{-14}	10^{-13}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	0, 001	1	1000	10^{-16}	10^{-17}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}	10^{-33}
a	10^{-18}	10^{-17}	10^{-16}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	0, 001	1	10^{-19}	10^{-20}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}	10^{-33}	10^{-36}
da	10	100	1000	10^{4}	10^{7}	10^{10}	10^{13}	10^{16}	10^{19}	1	0, 1	0, 01	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-17}
h	100	1000	10^{4}	10^{5}	10^{8}	10^{11}	10^{14}	10^{17}	10^{20}	10	1	0, 1	0, 0001	10^{-7}	10^{-10}	10^{-13}	10^{-16}
k	1000	10^{4}	10^{5}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	100	10	1	0, 001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
M	10^{6}	10^{7}	10^{8}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{5}	10^{4}	1000	1	0, 001	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}
G	10^{9}	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{8}	10^{7}	10^{6}	1000	1	0, 001	10^{-6}	10^{-9}
T	10^{12}	10^{13}	10^{14}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{11}	10^{10}	10^{9}	10^{6}	1000	1	0, 001	10^{-6}
P	10^{15}	10^{16}	10^{17}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{14}	10^{13}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	1000	1	0, 001
E	10^{18}	10^{19}	10^{20}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{36}	10^{17}	10^{16}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	1000	1

7.2 Primzahlen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187
1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427
1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609	1613
1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867
1871	1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087
2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287	2293	2297	2309	2311	2333
2339	2341	2347	2351	2357	2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423
2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539	2543	2549	2551	2557
2579	2591	2593	2609	2617	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767	2777	2789
2791	2797	2801	2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999	3001	3011	3019	3023	3037
3041	3049	3061	3067	3079	3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257	3259	3271	3299	3301	3307
3313	3319	3323	3329	3331	3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517	3527	3529	3533	3539
3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727	3733	3739	3761	3767	3769
3779	3793	3797	3803	3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989	4001	4003	4007	4013	4019
4021	4027	4049	4051	4057	4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231	4241	4243	4253	4259	4261
4271	4273	4283	4289	4297	4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493	4507	4513	4517	4519	4523
4547	4549	4561	4567	4583	4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751	4759	4783	4787	4789	4793
4799	4801	4813	4817	4831	4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003	5009	5011	5021	5023	5039
5051	5059	5077	5081	5087	5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279	5281	5297	5303	5309	5323
5333	5347	5351	5381	5387	5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521	5527	5531	5557	5563	5569
5573	5581	5591	5623	5639	5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791	5801	5807	5813	5821	5827
5839	5843	5849	5851	5857	5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053	6067	6073	6079	6089	6091
6101	6113	6121	6131	6133	6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301	6311	6317	6323	6329	6337
6343	6353	6359	6361	6367	6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473

6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571	6577	6581	6599	6607	6619
6637	6653	6659	6661	6673	6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833	6841	6857	6863	6869	6871
6883	6899	6907	6911	6917	6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103	7109	7121	7127	7129	7151
7159	7177	7187	7193	7207	7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411	7417	7433	7451	7457	7459
7477	7481	7487	7489	7499	7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643	7649	7669	7673	7681	7687
7691	7699	7703	7717	7723	7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829
7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919	7927	7933	7937	7949	7951
7963	7993	8009	8011	8017	8039	8053	8059	8069	8081	8087	8089	8093	8101	8111
8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179	8191	8209	8219	8221	8231	8233	8237	8243
8263	8269	8273	8287	8291	8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387
8389	8419	8423	8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501	8513	8521	8527	8537	8539
8543	8563	8573	8581	8597	8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669	8677
8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741	8747	8753	8761	8779	8783
8803	8807	8819	8821	8831	8837	8839	8849	8861	8863	8867	8887	8893	8923	8929
8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001	9007	9011	9013	9029	9041	9043	9049
9059	9067	9091	9103	9109	9127	9133	9137	9151	9157	9161	9173	9181	9187	9199
9203	9209	9221	9227	9239	9241	9257	9277	9281	9283	9293	9311	9319	9323	9337
9341	9343	9349	9371	9377	9391	9397	9403	9413	9419	9421	9431	9433	9437	9439
9461	9463	9467	9473	9479	9491	9497	9511	9521	9533	9539	9547	9551	9587	9601
9613	9619	9623	9629	9631	9643	9649	9661	9677	9679	9689	9697	9719	9721	9733
9739	9743	9749	9767	9769	9781	9787	9791	9803	9811	9817	9829	9833	9839	9851
9857	9859	9871	9883	9887	9901	9907	9923	9929	9931	9941	9949	9967	9973	

7.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Nü
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π ϖ	Pi
E	ϵ ε	Epsilon	P	ρ ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ ς	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
T	θ ϑ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Iota	Φ	ϕ φ	Phi
K	κ $\varkappa$	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mü	Ω	ω	Omega